MÉMOIRE

Sur un Cas particulier du Mouvement de rotation des Corps pesans ;

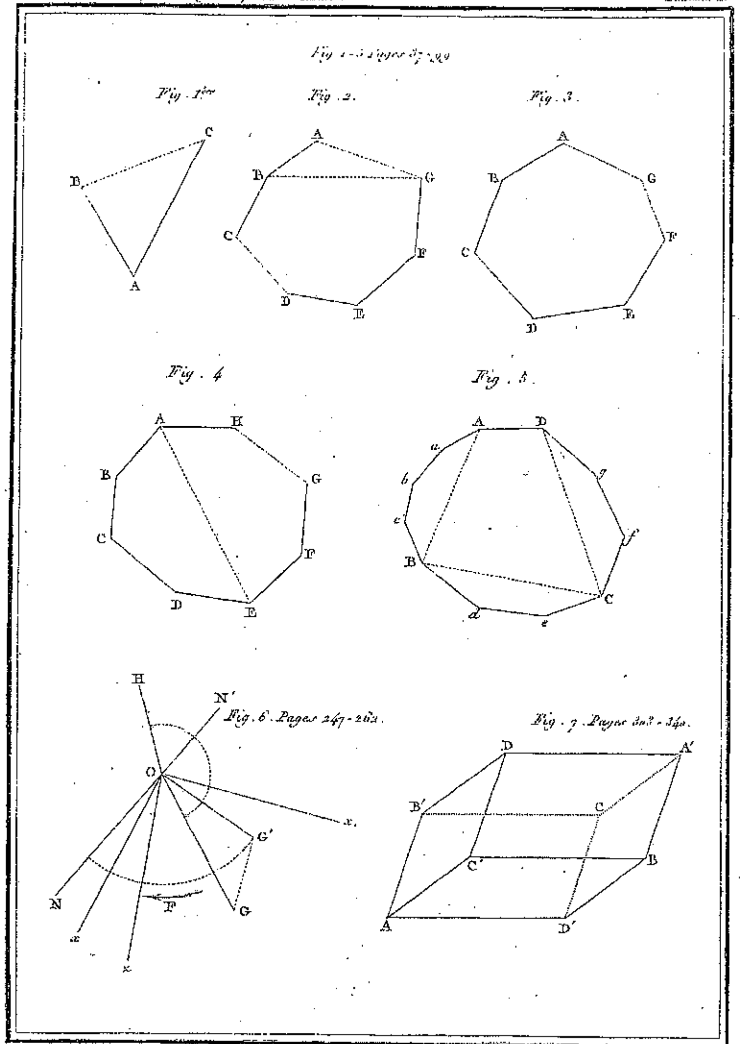
Par M. Poisson.

Quoique le problème du mouvement de rotation d'un corps pesant autour d'un point fixe soit un des premiers qui se présentent dans la mécanique des corps solides, les géomètres n'en ont point encore trouvé la solution générale. La détermination complète de ce mouvement dépend, comme l'on sait, de six équations différentielles du premier ordre; ou, ce qui revient au même, de trois équations du second, qui ne sont point intégrables, en général, par les moyens connus jusqu'ici : elles le deviennent, lorsque le point fixe coïncide avec le centre de gravité du mobile; on parvient, dans ce cas, à effectuer la séparation des variables; l'intégration se ramène aux quadratures, et le problème est censé résolu. Il en est de même, ainsi qu'on va le voir, lorsque le mobile est un solide de révolution, et qu'en même temps le point fixe se trouve sur son axe de figure à une distance quelconque de son centre de gravité. C'est ce cas particulier que je me propose de considérer dans ce mémoire.

[1.] Soient O *(pl. 1.re, fig. 6)* le point fixe, et G le centre de gravité du mobile; menons par le point O une verticale Oz, dirigée dans le sens de la pesanteur, un plan horizontal et un plan perpendiculaire à la droite OG. Soit NON', l'intersection de ces deux plans : dans le plan horizontal, traçons arbitrairement une droite fixe Ox, et dans le plan perpendiculaire à OG, menons de même une droite $Ox_{,}$ fixe dans

Journal de l'Ecole Polytechnique 9 (1813), No 16

Journal de l'École Impériale Polytechnique, 16.ème Cahier. Planche 1.ère



Girard del. L. Sévigny sculp.

le corps et mobile avec lui autour du point O. La droite OG est l'axe de figure du mobile que nous considérons; elle est aussi un des axes principaux de ce corps, qui se coupent au point O. De plus, par la propriété des solides de révolution, toute autre droite, telle que $Ox_,$, perpendiculaire à OG, est encore un axe principal : les trois angles zOG, xON, $x_,ON$ seront donc les variables qui entrent dans les équations du mouvement de rotation, et qui sont, comme on sait, les véritables inconnues du problème. Je les désignerai par θ, ψ et φ; de sorte que je ferai

$$zOG = \theta, \quad xON = \psi, \quad x_,ON = \varphi;$$

mais, afin d'éviter toute ambiguité dans la position des lignes mobiles et dans le sens de leurs mouvemens, il convient d'expliquer d'une manière précise, comment chacun de ces trois angles doit être compté.

Les angles ψ et φ pourront croître indéfiniment pendant le mouvement du corps; l'angle θ pourra croître seulement depuis $\theta = 0$ jusqu'à $\theta = 200°$: il sera aigu quand le point G se trouvera au-dessous du plan horizontal mené par le point O, et obtus lorsque le point G sera au-dessus de ce plan. Pour abréger, j'appellerai *équateur* du mobile, le plan mené par le point G perpendiculairement à l'axe OG; la droite NON' sera *la ligne des nœuds* sur le plan horizontal qui passe par le même point; si les points du corps qui se trouvent, à un instant quelconque, sur la partie ON de cette ligne, s'élèvent dans l'instant suivant au-dessus du plan horizontal, le point N sera le *nœud ascendant*; et dans le cas contraire, il serait le *nœud descendant*. Je supposerai que la droite ON, à laquelle se rapportent les angles ψ et φ, soit la partie de NON' qui aboutit au nœud ascendant, et je compterai l'angle φ dans le sens du mouvement sur l'équateur, de manière que cet angle soit moindre que $200°$, tant que la droite $Ox_,$ se trouvera au-dessus du plan horizontal, et devienne plus grand que $200°$, lorsque cette droite s'abaissera au-dessous de ce plan. L'angle compris entre les plans des angles ψ et φ sera toujours égal, ou à l'angle θ compris entre les perpendiculaires

Oz

Oz et OG à ces deux plans, on a son supplément ; cela dépendra du sens dans lequel l'angle ψ sera compté : or, je supposerai que l'angle de ces deux plans soit égal à θ, c'est-à-dire aigu, quand le point G tombera au-dessous du plan horizontal, et obtus dans le cas contraire. De cette manière, le sens dans lequel l'angle ψ sera compté, à partir de la ligne fixe Ox, sera toujours déterminé.

Il résulte de ces conventions, que si, pour fixer les idées, on suppose les angles ψ et ϕ moindres que 200°, et si l'on mène un plan vertical par la droite ON, les droites Ox, et Ox se trouveront toutes deux du même côté de ce plan, ou tomberont de deux côtés différens, selon que l'angle θ sera aigu ou obtus ; par conséquent, lorsque les deux angles ψ et ϕ croîtront ensemble, le mouvement de la droite ON sur le plan horizontal, se fera en sens contraire de celui de la droite Ox, sur l'équateur, si le point G est au-dessous du plan horizontal ; au contraire, ces deux mouvemens auront lieu dans le même sens, si le point G est au-dessus de ce plan : donc, dans le premier cas, le mouvement de la ligne des nœuds sera *rétrograde*, et dans le second, il sera *direct* par rapport au mouvement sur l'équateur.

[2.] Cela posé, appelons M la masse du corps, l la distance OG de son centre de gravité au point fixe, C son moment d'inertie par rapport à l'axe de figure OG, A son moment d'inertie par rapport à la droite $Ox_{,}$, lequel serait le même relativement à toute autre droite menée par le point G perpendiculairement à OG ; désignons par g la gravité ; enfin faisons, pour abréger,

$$a'' = -\sin.\theta.\sin.\phi, \quad b'' = -\sin.\theta.\cos.\phi :$$

les six équations connues du mouvement de rotation deviendront, dans le cas particulier que nous considérons (*),

(*) Les trois premières résultent des équations générales que l'on trouve au n.° 385 de

$$\left.\begin{aligned} Cdr &= 0\,;\\ Adq + (A - C).rpdt &= a''glMdt\,;\\ Adp + (C - A).rqdt &= -b''glMdt\,;\\ p\,dt &= \sin.\phi.\sin.\theta.d\psi - \cos.\phi.d\theta\,;\\ q\,dt &= \cos.\phi.\sin.\theta.d\psi + \sin.\phi.d\theta,\\ r\,dt &= d\phi - \cos.\theta.d\psi\,; \end{aligned}\right\}\ (1)$$

dt étant l'élément du temps, et p, q, r, les trois variables qui se rapportent à la position de l'axe instantané de rotation.

La première s'intègre immédiatement, et donne $r = n$, n étant la constante arbitraire. Pour se représenter plus facilement le mouvement du corps, on peut concevoir que ses différens points tournent parallèlement à son équateur, tandis que l'inclinaison de ce plan sur le plan horizontal et la ligne des nœuds varient d'une manière quelconque ; or, en considérant la sixième équation, on voit que rdt est la partie de $d\phi$ qui est due au mouvement parallèle à l'équateur, et $\cos.\theta.d\psi$, la partie due au déplacement de la ligne des nœuds ; de sorte qu'en vertu du premier mouvement, tous les points du corps décrivent l'angle rdt, dans l'instant dt, ou, autrement dit, r est la vîtesse angulaire du mouvement parallèle à l'équateur : donc, puisque r est une quantité constante et égale à n, il s'ensuit que ce mouvement est uniforme. La valeur de n dépendra de la vîtesse primitivement imprimée au mobile ; mais il faudra toujours qu'elle soit positive : car l'angle ϕ étant compté dans le sens du mouvement sur l'équateur, il faut que sa variation ndt, due à ce mouvement, soit positive.

D'après les valeurs de a'' et b'', il est aisé de vérifier qu'on a

$$d.\cos.\theta = (a''q - b''p)\,dt.$$

mon *Traité de Mécanique*, en y faisant $B = A$, $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = l$; les trois autres sont données dans le n.° 380. Ces équations supposent que les trois angles ψ, ϕ et θ sont pris dans le sens qu'on vient d'expliquer.

Si donc on multiplie la seconde équation (1) par q et la troisième par p, et qu'on les ajoute, on aura

$$A(qdq + pdp) = glM.d.\cos.\theta;$$

et en intégrant,

$$A(q^2 + p^2) = 2glM.\cos.\theta + h, \quad (2)$$

h étant la constante arbitraire. De même, en ajoutant ces deux équations, après les avoir multipliées, l'une par b'' et l'autre par a'', on a

$$A(b''dq + a''dp) + (C - A)n.d.\cos.\theta = 0;$$

mais on vérifie aisément que

$$db'' = (p\cos.\theta - a''n)dt, \quad da'' = (b''n - q.\cos.\theta)dt;$$

et par conséquent,

$$A(q\,db'' + p\,da'') = An(b''p - a''q)dt = -An.d.\cos.\theta;$$

ajoutant donc cette équation à la précédente, on a

$$A.d.(b''q + a''p) + Cn.d.\cos.\theta = 0;$$

intégrant et désignant par k la constante arbitraire, il vient

$$A(b''q + a''p) + Cn.\cos.\theta = k. \quad (3)$$

Ces deux intégrales des équations du mouvement sont celles qui seraient fournies directement par le principe des forces vives et par celui des aires qui a lieu par rapport au plan horizontal mené par le point O, parce que la seule force accélératrice appliquée aux points du corps, est la pesanteur dont la direction est perpendiculaire à ce plan. Elles suffiront pour résoudre le problème, en y mettant pour p et q leurs valeurs données par les quatrième et cinquième équations (1) : elles deviennent alors

$$\left.\begin{aligned} A\left(\sin.^2\theta.\frac{d\psi^2}{dt^2} + \frac{d\theta^2}{dt^2}\right) &= 2glM.\cos.\theta + h, \\ -A.\sin.^2\theta.\frac{d\psi}{dt} + Cn.\cos.\theta &= k. \end{aligned}\right\} (4)$$

Éliminant $\frac{d\psi}{dt}$ entre elles, on a

$$A^2.\sin.^2\theta.\frac{d\theta^2}{dt^2} + (k - Cn.\cos.\theta)^2 = (2glM.\cos.\theta + h)A.\sin.^2\theta; \quad (5)$$

d'où l'on tire

$$dt = \frac{A.\sin.\theta.d\theta}{\sqrt{[(2glM.\cos.\theta + h)A.\sin.^2\theta - (k - Cn.\cos.\theta)^2]}}.$$

En général, cette formule est du nombre de celles que l'on ne sait point intégrer sous forme finie; mais elle donnera toujours, par la méthode des *quadratures*, la valeur de t correspondante à une valeur quelconque de θ; d'où l'on conclura réciproquement la valeur de θ qui répond à une valeur donnée de t. Si l'on substitue cette expression de dt dans la seconde équation (4), on en déduira celle de $d\psi$ sous la forme $d\psi = F\theta.d\theta$; on aura donc aussi par les quadratures la valeur de ψ en fonction de θ. Mettant de même les valeurs de dt et $d\psi$ dans la sixième équation (1), elle donnera $d\varphi$ sous la forme $d\varphi = f\theta.d\theta$; et par une nouvelle intégration, on aura l'angle φ en fonction de θ. Ayant ainsi les angles ψ et φ au moyen de θ, et cet angle en fonction de t, il ne restera plus, pour achever la solution complète du problème, qu'à déterminer les constantes arbitraires qui entrent dans ces valeurs, et qui sont au nombre de six, savoir, k, n, h, et les trois constantes qui sont introduites par les intégrations de $d\theta$, $d\psi$ et $d\varphi$.

[3.] Les valeurs de k, n et h dépendent du mouvement initial du corps, et elles se détermineront facilement par la considération du *moment principal* et du plan auquel il se rapporte, dont j'ai fait usage dans le n.° 390 de mon *Traité de mécanique*.

Pour cela, soit α la valeur de l'angle θ à l'origine du mouvement;

supposons, en outre, qu'à cet instant, le corps a été frappé suivant une direction donnée, et soit m le moment de cette force par rapport au point O. Menons un plan par ce point et par cette direction; élevons sur ce plan une perpendiculaire OH, et soient β l'angle HOG, γ l'angle HOz, lesquels angles mesurent les inclinaisons du plan de la force et du point O, sur l'équateur et sur le plan horizontal. Dans le premier instant du mouvement, le moment principal des quantités de mouvement de tous les points du corps par rapport au point O, doit être égal au moment m de l'impulsion primitive, et son plan doit coïncider avec celui qui passe par la direction de cette force et par le point O: or, on sait qu'à un instant quelconque (*),

1.° Le moment principal est exprimé par $\sqrt{(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2)}$, A, B, C, étant les trois momens d'inertie principaux; donc, en faisant $B = A$ et $r = n$, on aura à l'origine du mouvement,

$$A^2(p^2 + q^2) + C^2 n^2 = m^2.$$

2.° La quantité $-Cr$ est égale à ce moment projeté sur le plan perpendiculaire à l'axe principal qui est ici l'axe OG, c'est-à-dire, multiplié par le cosinus de l'angle HOG; donc, à cause de $r = n$, on aura

$$-Cn = m \cdot \cos.\beta.$$

3.° Le même moment projeté sur le plan perpendiculaire à Oz, ou multiplié par le cosinus de l'angle HOz, est exprimé par le premier membre de l'équation (3), pris avec un signe contraire; mettant donc k à la place de ce premier membre, on aura

$$-k = m \cdot \cos.\gamma.$$

Les valeurs des constantes k et n sont donc déterminées, puisque les quantités m, β et γ sont censées connues. A la vérité, le plan de l'impulsion primitive étant connu, la direction de la perpendiculaire à

(*) *Voyez* les n.os 378 et 379 de l'ouvrage cité.

ce plan est aussi déterminée; mais les angles β et γ peuvent indifféremment se rapporter à la partie OH de cette droite ou à son prolongement, ce qui laisse indéterminés les signes de leurs cosinus, et par conséquent ceux des valeurs de n et de k. Mais, comme la quantité n doit être positive [n.° 2.], et que les quantités C et m le sont aussi, il suit de l'équation $Cn = -m.\cos.\beta$, que l'angle β doit être obtus; donc il faut prendre pour la droite OH à laquelle il se rapporte, la partie de la perpendiculaire au plan du choc primitif, qui fait un angle obtus avec la droite OG. On saura, d'après cela, si l'angle γ qu'elle fait avec Oz, est aigu ou obtus, et le signe de k sera déterminé

On tire de l'équation (2)

$$A^2(p^2+q^2) + C^2 n^2 = hA + 2glMA.\cos.\theta + C^2 n^2;$$

donc, en faisant $\theta = \alpha$, et en ayant égard à l'expression de m^2, nous aurons,

$$hA + 2glMA.\cos.\alpha = m^2.\sin.^2\beta;$$

équation qui donnera la valeur de h.

[4.] Je substitue les valeurs trouvées pour h, n et k dans l'équation (5), qui devient

$$A^2.\frac{d\theta^2}{dt^2} = m^2\sin.^2\beta + 2\mu^2(\cos.\theta - \cos.\alpha) - \frac{m^2(\cos.\gamma - \cos.\beta.\cos.\theta)^2}{\sin.^2\theta}, \quad \text{(a)}$$

en faisant, pour abréger,

$$glMA = \mu^2.$$

La seconde équation (4) devient de même

$$A.\sin.^2\theta.\frac{d\psi}{dt} = m(\cos.\gamma - \cos.\beta.\cos.\theta); \quad \text{(b)}$$

et si, au moyen de celle-ci, on élimine $d\psi$ dans la 6.e équation (1), on aura

$$\frac{d\varphi}{dt} = n + \frac{m(\cos.\gamma - \cos.\beta.\cos.\theta).\cos.\theta}{A.\sin.^2\theta}. \quad \text{(c)}$$

Ce sont ces trois équations qui renferment la solution complète du problème. On déterminera les constantes qu'introduisent les intégrations des valeurs de dt, $d\psi$ et $d\phi$, données par ces équations, en supposant, ce qui est permis, que l'on ait

$$t = 0, \quad \psi = 0, \quad \phi = 0,$$

à l'origine du mouvement, ou en même temps que $\theta = \alpha$.

[5.] Appliquons cette solution au cas où le plan de l'équateur conserve à très-peu-près une inclinaison constante sur le plan horizontal. Il faut, pour cela, que l'angle θ diffère très-peu de la valeur initiale α; soit donc $\theta = \alpha - x$, x étant une très-petite quantité : substituons cette valeur dans l'équation (a), et développons son second membre suivant les puissances de x, nous aurons

$$A^2 \cdot \frac{dx^2}{dt^2} = a + 2bx - cx^2 + \&c.; \qquad (a')$$

en faisant, pour abréger,

$$a = \frac{m^2[\sin.^2\beta \cdot \sin.^2\alpha - (\cos.\gamma - \cos.\beta \cdot \cos.\alpha)^2]}{\sin.^2\alpha},$$

$$b = \mu^2 . \sin.\alpha + \frac{m^2(\cos.\gamma - \cos.\beta.\cos.\alpha)(\cos.\beta - \cos.\gamma.\cos.\alpha)}{\sin.^3\alpha}$$

$$c = \mu^2 . \cos.\alpha + \frac{m^2(\cos.^2\beta + \cos.^2\gamma - 2.\cos.\beta.\cos.\gamma.\cos.\alpha)}{\sin.^2\alpha}$$

$$- \frac{3m^2(\cos.\gamma - \cos.\beta.\cos.\alpha)(\cos.\beta - \cos.\gamma.\cos.\alpha).\cos.\alpha}{\sin.^4\alpha},$$

&c.

Si on néglige les puissances de x supérieures à la seconde, la valeur de dt, tirée de l'équation (a'), s'intégrera sous forme finie : la valeur de x en fonction de t, sera exprimée par un sinus ou cosinus d'arc proportionnel à t. Pour qu'elle demeure toujours très-petite, comme nous l'avons supposé, il faudra que ce sinus ou cosinus ne se change point en une exponentielle, et qu'il soit multiplié par un coëfficient très-petit; conditions qui dépendront de la grandeur et de la direction du choc

primitif. Quand elles ne seront pas remplies, il en faudra conclure que l'angle θ ne demeure pas à-peu-près constant : on rejettera la valeur de x, et l'on reprendra l'équation (a) pour déterminer l'angle θ.

[6.] Si nous prenons pour exemple, le cas où l'impulsion primitive a eu lieu dans le plan même de l'équateur, la droite OH coïncide alors avec le prolongement de l'axe OG; on a donc

$$\beta = 200°, \quad \gamma = 200° - \alpha;$$

d'où il suit,

$$a = 0, \quad b = \mu^2.\sin.\alpha, \quad c = \mu^2.\cos.\alpha + m^2.$$

Il vaut mieux employer la vîtesse n à la place du moment m de la force qui l'a produite; or, à cause de $\beta = 200°$, on a [n.° 3]

$$m = Cn;$$

donc

$$c = \mu^2.\cos.\alpha + C^2n^2.$$

Ces valeurs de a, b, c, étant substituées dans l'équation (a'), il vient, en négligeant le cube et les puissances supérieures de x,

$$A^2 \cdot \frac{dx^2}{dt^2} = 2\mu^2.\sin.\alpha.x - (C^2n^2 + \mu^2.\cos.\alpha)x^2;$$

d'où l'on tire

$$dt = \frac{A\,dx}{\sqrt{[2\mu^2.\sin.\alpha.x - (C^2n^2 + \mu^2.\cos.\alpha)x^2]}}:$$

J'intègre cette formule; je détermine la constante arbitraire de manière qu'on ait $t = 0$ quand $x = 0$, et j'en déduis ensuite la valeur de x; il vient

$$x = \frac{\mu^2.\sin.\alpha}{C^2n^2 + \mu^2.\cos.\alpha} \cdot \left[1 - \cos.\left(\frac{t\sqrt{(C^2n^2 + \mu^2.\cos.\alpha)}}{A}\right)\right].$$

Or, pour que cette valeur de x demeure constamment très-petite, il est évident qu'il faut, ou que l'angle α soit très-petit, ce qui serait le

cas

cas d'un pendule composé qu'on écarte très-peu de sa position d'équilibre, ou bien que la quantité n soit très-grande par rapport à $\frac{\mu}{C}$. Le second cas est celui où l'on a imprimé au mobile une très-grande vîtesse de rotation autour de son axe OG; et l'on voit qu'alors cet axe fera des oscillations dont l'amplitude et la durée seront fort petites, et d'autant moindres que la vîtesse imprimée sera plus grande. Cette amplitude, ou ce qui est la même chose, la plus grande valeur de x, répond au temps déterminé par cette équation,

$$\frac{t\sqrt{(C^2n^2+\mu^2 \,.\, \cos.\alpha)}}{A} = \pi;$$

π désignant le rapport de la circonférence au diamètre : elle est exprimée par

$$\frac{2\mu^2 \,.\, \sin.\alpha}{C^2n^2+\mu^2\cos.\alpha},$$

et sa durée est égale à

$$\frac{\pi A}{\sqrt{(C^2n^2+\mu^2 \,.\, \cos.\alpha)}}.$$

Pour déterminer le mouvement correspondant du nœud N sur l'équateur, je mets $\alpha - x$ à la place de θ dans l'équation (b), et négligeant le carré de x, il vient

$$A \,.\, \sin.\alpha \,.\, \frac{d\psi}{dt} = Cnx;$$

substituant pour x sa valeur précédente, et intégrant ensuite, on a

$$\psi = \frac{Cn\mu^2}{AC^2n^2+A\mu^2.\cos.\alpha} \,.\, \left[t - \frac{A}{\sqrt{(C^2n^2+\mu^2.\cos.\alpha)}} \,.\, \sin.\left(\frac{t\sqrt{(C^2n^2+\mu^2 \,.\, \cos.\alpha)}}{A}\right)\right].$$

Cette valeur de ψ montre que, quand la vîtesse n est très-grande, le mouvement du nœud est sensiblement uniforme; car alors le terme qui renferme un sinus est très-petit à raison de son dénominateur, et l'angle ψ croît à-peu-près dans le même rapport que le temps t. La

petite inégalité qui résulte de ce terme et qui affecte le mouvement du nœud, suit la même loi que la petite oscillation de l'axe OG.

L'équation (c), en y faisant $\theta = \alpha - x$, et négligeant le carré de x, devient

$$d\phi = n\,dt + \frac{Cn.\cos.\alpha}{A.\sin.\alpha} \,.\, x\,dt;$$

mettant pour x sa valeur, et intégrant, on a

$$\phi = nt + \frac{Cn\mu^2.\cos.\alpha}{AC^2n^2+A\mu^2.\cos.\alpha} \,.\, \left[t - \frac{A}{\sqrt{(C^2n^2+\mu^2.\cos.\alpha)}} \,.\, \sin.\left(\frac{\sqrt{(C^2n^2+\mu^2.\cos.\alpha)}}{A}\right)\right].$$

Dans l'hypothèse d'une très-grande vîtesse n, cette valeur de ϕ sera sensiblement proportionnelle au temps, comme celle de l'angle ψ; de plus, en comparant les valeurs de ces deux angles, on voit que le mouvement du nœud sera, en général, très-lent par rapport au mouvement de la droite Ox, sur l'équateur; et comme on voit aussi que les angles ϕ et ψ croîtront tous deux ensemble, il suit de ce qu'on a dit plus haut (n.° 1), que le mouvement du nœud N sera rétrograde ou direct, selon que le centre de gravité G se trouvera au-dessous ou au-dessus du plan horizontal passant par le point O.

[7.] Si à l'origine du mouvement, le point G était dans le plan horizontal, ou, ce qui revient au même, si l'on avait $\alpha = 100°$, il faudrait considérer la position de ce point dans l'instant suivant : or, la valeur précédente de x étant toujours positive, il en résulte que l'angle θ, qui est égal à $\alpha - x$, deviendra moindre qu'un droit, et que le point G s'abaissera au-dessous du plan horizontal; par conséquent, dans ce cas, le mouvement du nœud est rétrograde. Mais, en général, lorsque l'équateur approche d'être perpendiculaire au plan horizontal, il est difficile de distinguer si un mouvement qui se fait sur ce dernier plan, est direct ou rétrograde par rapport au mouvement sur l'équateur: voici donc une autre règle qui servira, dans tous les cas, à déterminer facilement le sens du mouvement du nœud.

Soit G' la projection du point G sur le plan horizontal; tirons la droite OG' qui sera perpendiculaire à la ligne ON : ces deux droites tourneront ensemble autour du point θ ; or, le point N étant supposé le nœud ascendant, je dis que la droite ON précédera toujours la droite OG', de manière que le mouvement se fera dans le sens indiqué par la flèche F. Cela résulte évidemment de ce que la partie de l'équateur élevée au-dessus du plan horizontal, penche vers le point G' ou de l'autre côté de la droite ON, selon que le point G est au-dessous ou au-dessus de ce plan; c'est-à-dire, selon que le mouvement de ON doit être rétrograde ou direct.

[8.] Nous pouvons conclure de cette analyse, que, quand on imprime à un corps, comme celui que nous considérons, une très-grande vîtesse de rotation autour de son axe de figure, le plan que nous avons nommé équateur, conserve une inclinaison sensiblement constante sur l'horizon; et en même temps son intersection avec un plan horizontal passant par le point fixe, se meut uniformément dans le sens ou en sens contraire du mouvement imprimé, selon que le centre de gravité du mobile est plus élevé ou moins élevé que le point fixe.

Il existe au cabinet de physique de l'École polytechnique, une machine très-ingénieuse, imaginée par M. *Bohnenberger*, qui représente parfaitement les diverses circonstances du mouvement que nous considérons. L'auteur la destine à rendre sensible aux yeux le phénomène de la *précession des équinoxes* ; et, en effet, ce mouvement a une grande analogie avec celui qui nous occupe; car ici, comme dans le mouvement de la terre, c'est la grande vîtesse de rotation qui soutient l'équateur dans une inclinaison constante, et qui fait mouvoir la ligne des nœuds, qui, sans cette vîtesse, resterait en repos (*).

Le jeu de la *toupie* offre aussi un mouvement semblable à celui que nous venons de déterminer; seulement il y a cette différence, que

(*) Voyez l'*Exposition du Système du Monde*, liv. IV, chap. XIV.

Gil. Rh

le centre de gravité de la toupie étant nécessairement au-dessus du plan horizontal sur lequel elle s'appuie, le mouvement des nœuds ne peut jamais être rétrograde : pendant qu'elle tourne rapidement autour de son axe de figure, celui-ci, quand il n'est pas vertical, tourne avec une moindre vîtesse et dans le même sens autour de la verticale élevée par le point d'appui.

[9.] Dans l'hypothèse que nous venons de prendre pour exemple, l'oscillation de l'axe OG ne peut être rigoureusement nulle, à moins que la vîtesse imprimée au mobile ne soit infinie; mais on peut demander si, pour une autre direction de l'impulsion primitive, il ne pourrait pas arriver que l'équateur conservât une inclinaison rigoureusement constante, la vîtesse de rotation étant une quantité finie.

Pour répondre à cette question, j'observe d'abord que la valeur de x, tirée de l'équation (a'), ne peut être nulle pour toutes les valeurs de t, à moins qu'on n'ait à-la-fois $a = 0$ et $b = 0$; car, si l'un ou l'autre de ces coëfficiens n'était pas zéro, on déduirait de l'équation (a') une valeur de x semblable à celle du n.° 6, et il en résulterait toujours une oscillation dans l'axe OG. Réciproquement, si l'on a $a = 0$ et $b = 0$, je dis qu'on aura aussi $x = 0$ pour toutes les valeurs de t.

En effet, à l'origine du mouvement, on a $x = 0$ par hypothèse; donc, à cause de $a = 0$, l'équation (a') donne aussi $\frac{dx}{dt} = 0$ à cet instant qui répondra, si l'on veut, à $t = 0$. De plus, en différenciant l'équation (a'), et supprimant le facteur $\frac{dx}{dt}$, commun à tous les termes, on a

$$\frac{d^2x}{dt^2} = b - cx + \&c. ;$$

donc, à cause de $b = 0$, on aura aussi $\frac{d^2x}{dt^2} = 0$ en même temps que $x = 0$. Maintenant, si l'on différencie de nouveau cette équation autant de fois qu'on voudra, pour en déduire les coëfficiens différentiels des ordres supérieurs, il est aisé de voir que tous les coëfficiens seront nuls en même temps que x et $\frac{dx}{dt}$; donc la quantité x et tous ses coëfficiens différentiels étant nuls, pour la valeur particulière $t=0$, il s'ensuit qu'on a aussi $x=0$ pour une valeur quelconque de t.

Cela posé, l'équation $a=0$ donne d'abord,

$$\sin.^2 \alpha . \sin.^2 \beta - (\cos. \gamma - \cos. \beta . \cos. \alpha)^2 = 0 ;$$

d'où l'on tire

$$\cos. \gamma = \cos. \beta . \cos. \alpha \pm \sin. \alpha . \sin. \beta = \cos. (\beta \mp \alpha) ;$$

ce qui nous apprend que l'angle γ doit être égal à la somme ou à la différence des angles β et α. Mais pour cela, il faut que les trois droites OH, Oz et OG soient dans un même plan, et par conséquent, que les plans auxquels elles sont perpendiculaires, savoir, le plan de l'impulsion primitive, le plan horizontal et l'équateur se coupent suivant une même droite : donc, toutes les fois que l'impulsion primitive n'a pas eu lieu dans un plan passant par la ligne des nœuds NON', il est impossible que l'équateur conserve une inclinaison constante sur le plan horizontal.

De l'équation $\cos. \gamma = \cos. (\beta \mp \alpha)$, il suit $\cos. \beta = \cos. (\gamma \pm \alpha)$; on a donc en même temps ces deux équations,

$$\cos. \gamma - \cos. \beta . \cos. \alpha = \pm \sin. \alpha . \sin. \beta ,$$
$$\cos. \beta - \cos. \gamma . \cos. \alpha = \mp \sin. \alpha . \sin. \gamma ;$$

d'où l'on conclut,

$$(\cos. \gamma - \cos. \beta . \cos. \alpha) (\cos. \beta - \cos. \gamma . \cos. \alpha) = - \sin.^2 \alpha . \sin. \beta . \sin. \gamma ;$$

ce qui change la valeur de b du n.° 5, en celle-ci :

$$b = \mu^2 . \sin. \alpha - \frac{m^2 . \sin. \beta . \sin. \gamma}{\sin. \alpha} .$$

Égalant cette quantité à zéro, on en tire pour m^2, cette valeur réelle et positive :

$$m^2 = \frac{\mu^2 . \sin.^2 \alpha}{\sin. \beta . \sin. \gamma} ;$$

donc, pour chaque direction qu'on peut donner au plan du choc primitif, il existe une valeur de m, et il n'en existe qu'une qui satisfait à l'équation $b=0$.

Ainsi, en frappant le corps suivant un plan passant par l'intersection de son équateur avec le plan horizontal mené par le point fixe, on peut toujours déterminer le moment de cette impulsion, de manière que l'inclinaison des deux plans reste rigoureusement constante pendant le mouvement produit. Observons, cependant, que, si la direction de cette force était comprise dans le plan de l'équateur ou dans le plan horizontal, on aurait

$$\sin. \beta = 0 \quad \text{ou} \quad \sin. \gamma = 0 ,$$

et dans l'un et l'autre cas, la valeur de m deviendrait infinie ; de sorte qu'il faudrait alors imprimer au mobile une vîtesse de rotation infinie, pour que son équateur conservât une inclinaison constante.