

# On $Z_{2^k}$ -Dual Binary Codes

Denis S. Krotov

## Abstract

A new generalization of the Gray map is introduced. The new generalization  $\Phi : Z_{2^k}^n \rightarrow Z_2^{2^{k-1}n}$  is connected with the known generalized Gray map  $\varphi$  in the following way: if we take two dual linear  $Z_{2^k}$ -codes and construct binary codes from them using the generalizations  $\varphi$  and  $\Phi$  of the Gray map, then the weight enumerators of the binary codes obtained will satisfy the MacWilliams identity. The classes of  $Z_{2^k}$ -linear Hadamard codes and co- $Z_{2^k}$ -linear extended 1-perfect codes are described, where co- $Z_{2^k}$ -linearity means that the code can be obtained from a linear  $Z_{2^k}$ -code with the help of the new generalized Gray map.

## Index Terms

Gray map, Hadamard codes, MacWilliams identity, perfect codes,  $Z_{2^k}$ -linearity

## I. INTRODUCTION

As discovered in [1], [2] certain nonlinear binary codes can be represented as linear codes over  $Z_4$ . The variant of this representation founded in [3] use the mapping  $\phi : 0 \rightarrow 00, 1 \rightarrow 01, 2 \rightarrow 11, 3 \rightarrow 10$ , which is called the *Gray map*, to construct binary so-called  $Z_4$ -linear codes from linear quaternary codes. The main property of  $\phi$  from this point of view is that it is an isometry between  $Z_4$  with the Lee metric and  $Z_2^2$  with the Hamming metric. In [4] (and in [5] in more general form) the Gray map is generalized to construct  $Z_{2^k}$ -linear codes. The generalized Gray map (say  $\varphi$ ; see **Subsection II-A** for recalling basic facts on the generalized Gray map) is an isometric imbedding of  $Z_{2^k}$  with the metric specified by the homogeneous weight [6] into  $Z_2^{2^{k-1}}$  with the Hamming metric.

In this paper we introduce another generalization  $\Phi$  of the Gray map (**Subsection II-B**). This generalization turns out to be dual to the previous in the following sense. If  $\mathcal{C}$  and  $\mathcal{C}^\perp$  are dual linear  $Z_{2^k}$ -codes, then the binary  $Z_{2^k}$ -linear code  $\varphi(\mathcal{C})$  and the co- $Z_{2^k}$ -linear code  $\Phi(\mathcal{C}^\perp)$  are formally dual. The formal duality is that the weight enumerators of these two codes satisfy the MacWilliams identity (**Section III**); note that these codes, in general, can be nonlinear, in which case they cannot be dual in the usual sense, as subspaces of the binary vector space. So, we solve the problem of duality for  $Z_{2^k}$ -linear binary codes: to relate the weight enumerators of the images of dual linear codes over  $Z_{2^k}$ . This problem cannot be solved using only the standard generalized Gray map  $\varphi$ , because, as noted in [4], the weight enumerators of  $\varphi(\mathcal{C})$  and  $\varphi(\mathcal{C}^\perp)$  are in general not related, contrarily to the case of  $Z_4$ -linear codes.

In [5], it is shown that binary (and, in general, nonbinary) codes can be represented as group codes over different groups. Such representations use a special *scaled isometry* ( $\varphi$  is a partial case of such isometry), which acts isometrically from some module with a specially defined metric to the binary (or, in general, nonbinary) Hamming space. With such approach, each module element corresponds to one codeword;  $Z_{2^k}$ -linear codes are a partial case of that approach.

In our approach, every module element (word) corresponds to some set of codewords, which is a Cartesian product of the sets corresponding, by a special mapping, to the symbols of the module word. In the constructive part, this approach can be represented by the generalized concatenation construction [7], but the resulting code distance differs from the constructive distance of generalized concatenated codes. Calculating distance, we use some isometrical properties of the mapping, which can be considered as an

This is author's version of the correspondence in the IEEE Transactions on Information Theory 53(4) 2007, 1532–1537, Digital Object Identifier [10.1109/TIT.2007.892787](https://doi.org/10.1109/TIT.2007.892787), ©2007 IEEE.

Some results of this paper were presented at the 4th International Workshop on Optimal Codes and Related Topics OC2005 (Pamprovo, Bulgaria, June 2005).

D. S. Krotov is with the Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia (e-mail: [krotov@math.nsc.ru](mailto:krotov@math.nsc.ru)).

analog of a scaled isometry. The map  $\Phi$  considered in this paper allows to construct only codes with distance maximum 4, but in general the approach may have a larger potential.

The new way to generalize the Gray map (**Subsection II-B**) and its duality (**Section III**) to the “old way” are the main results of the first part of the paper. The second part (**Sections IV–VI**) is devoted to constructions of co- $Z_{2^k}$ -linear and  $Z_{2^k}$ -linear codes with parameters of extended 1-perfect and Hadamard codes. There is a series (e. g. [8], [9], [10], [11], [12], [13], [14], [15], [16]) of papers that concern 1-perfect (or extended 1-perfect) and Hadamard codes which are linear in some nonstandard sense (note that for each considered values of parameters only exists one linear code, up to equivalence). Using the two generalized  $\varphi$ ,  $\Phi$  Gray maps, we construct a wide class of such codes. Some natural questions on the constructed codes remains open for future researching: which of these codes are equivalent to each other or to other known codes; which of them are propelinear (see the definition in [8]) or at least transitive (see [17] for the definition and some constructions of transitive 1-perfect codes); to establish the bounds on the dimension of the kernel and rank for these codes (the dimension of the kernel and rank are good measures of linearity of nonlinear codes in the classical binary sense. For  $Z_4$ -linear extended 1-perfect and Hadamard codes these parameters were calculated in [10], [11], [13], [14], [15]); and so on.

In **Section IV** we construct co- $Z_{2^k}$ -linear extended 1-perfect  $(n, 2^n/2n, 4)$  codes. As noted above, the code distance of a co- $Z_{2^k}$ -linear code cannot exceed 4 if  $k > 2$  (see **Lemma 2-5**). So, extended 1-perfect codes are the best examples.

As a corollary, the dual distance of a  $Z_{2^k}$ -linear code ( $k > 2$ ) also cannot exceed 4. Best examples are codes with large code distance. In **Section V** we construct  $Z_{2^k}$ -linear codes with parameters  $(n, 2n, n/2)$ , i. e., Hadamard codes. They are  $Z_{2^k}$ -dual to the extended 1-perfect codes from **Section IV**; i. e., the  $\varphi$  and, respectively,  $\Phi$  preimage of the constructed extended 1-perfect and Hadamard codes are dual  $Z_{2^k}$  codes.

The introduced constructions of codes are a generalization of the constructions of  $Z_4$ -linear extended 1-perfect and Hadamard codes [10], [11] (see also [13]).

It is natural to ask whether our construction of co- $Z_{2^k}$ -linear extended 1-perfect and  $Z_{2^k}$ -linear Hadamard codes is complete or not. In **Section VI** we show that the answer is yes; i. e., all co- $Z_{2^k}$ -linear extended 1-perfect codes and all  $Z_{2^k}$ -linear Hadamard codes are equivalent to codes constructed in **Sections IV and V**.

## II. DEFINITIONS AND BASIC FACTS. TWO GENERALIZATIONS OF GRAY MAP

We will use the following common notations. An  $(n, M, d)$  *binary code* is a cardinality  $M$  subset of  $Z_2^n = Z_2 \times \dots \times Z_2$  with the distance at least  $d$  between every two different elements (*codewords*);  $n$  is called the *code length* and  $d$  is called the *code distance*. An  $(n, 2n, n/2)$  binary code is called an *Hadamard code*; such codes exist if and only if Hadamard  $n \times n$  matrices exist, i. e., at least  $n \equiv 0 \pmod{4}$  if  $n > 2$ , see e. g. [18]. A linear Hadamard code is known as a first order Reed-Muller code;  $n$  is a power of two is this case. An  $(n, 2^n/2n, 4)$  binary code is called an *extended 1-perfect code*; such codes exist if and only if  $n$  is a power of two. Such a code is always an extension of a  $(n-1, 2^n/2n, 3)$  code, which is called 1-perfect; so, studying extended 1-perfect codes is an alternative way to study 1-perfect codes. For each admissible length there is only one, up to coordinate permutation, linear (extended) 1-perfect code and, if  $n > 8$ , many nonlinear ones; the classification of all such codes is currently an open problem. In the following two subsections we will define the basic concepts, which will be used throughout the paper: two weight functions on  $Z_{2^k}$ , two corresponding metrics, two generalized Gray maps  $\varphi$  and  $\Phi$ , the concepts of  $Z_{2^k}$ -linear and co- $Z_{2^k}$ -linear codes; we will formulate simple but fundamental claims on isometric properties of  $\varphi$  and  $\Phi$ .

### A. $Z_{2^m}$ -Linear Codes

This subsection recalls basic definitions and facts about the generalized Gray map and  $Z_{2^k}$ -linear codes [4], [5].

Assume  $m \geq 2$  is an integer such that there exist an Hadamard  $m \times m$  matrix. Let  $A \subset Z_2^m$  be a Hadamard  $(m, 2m, m/2)$  code. Assume that  $A = \{a_0, a_1, \dots, a_{2m-1}\}$ , where  $a_0$  is the all-zero codeword and  $a_i + a_{i+m}$  is the all-one codeword for each  $i$  from 0 to  $m-1$ . Define the *generalized Gray map*  $\varphi : Z_{2m}^n \rightarrow Z_2^{mn}$  by the rule

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) \triangleq (a_{x_1}, \dots, a_{x_n}).$$

Let the weight function  $wt^* : Z_{2m} \rightarrow R^+$  be given by

$$wt^*(x) \triangleq \begin{cases} 0 & \text{if } x = 0, \\ m & \text{if } x = m, \\ m/2 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Whenever  $m$  is a power of two, the weight  $wt^*$  is the *homogeneous weight* introduced in [6] for more general class of rings. The corresponding distance  $d^*$  on  $Z_{2m}^n$  is defined by the standard way:

$$d^*((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) \triangleq \sum_{i=1}^n wt^*(y_i - x_i).$$

*Proposition 2-1 ([5]):* The mapping  $\varphi$  is an isometric embedding of  $(Z_{2m}^n, d^*)$  into  $(Z_2^{mn}, d)$ , i.e.,  $d^*(\bar{x}, \bar{y}) = d(\varphi(\bar{x}), \varphi(\bar{y}))$ , where  $d(\cdot, \cdot)$  is the Hamming distance.

If  $\mathcal{C} \subseteq Z_{2m}^n$ , then

$$\varphi(\mathcal{C}) \triangleq \{\varphi(\bar{x}) \mid \bar{x} \in \mathcal{C}\}.$$

We will say that  $\mathcal{C}$  is a  $(n, M, d)^*$  code if  $\mathcal{C} \subseteq Z_{2m}^n$ ,  $|\mathcal{C}| = M$ , and the  $d^*$ -distance between any two different elements of  $\mathcal{C}$  is not less than  $d$ .

*Corollary 2-2:* If  $\mathcal{C}$  is a  $(n, M, d)^*$  code, then  $\varphi(\mathcal{C})$  is a binary  $(mn, M, d)$  code.

A binary code is called  *$Z_{2m}$ -linear* if its coordinates can be arranged in such a way that it is the image of a linear  $Z_{2m}$ -code by  $\varphi$ . As noted in [4], the length of a  $Z_{2m}$ -linear code must be a multiple of  $m$  and all the weights of its codewords must be multiples of  $m/2$ .

*Remark 2-3:* The map  $\varphi$  and the concept of  $Z_{2m}$ -linearity given above depends on the choice of a Hadamard code  $A$  and the only restriction on  $m$  is that exists a Hadamard  $m \times m$  matrix. In fact, originally [4] (and in the binary subcase of [5, Section D])  $m = 2^{k-1}$  and the code  $A$  is fixed as  $R(1, k-1)$ , the Reed-Muller code of order 1.

## B. Co- $Z_{2^k}$ -Linear Codes

In this subsection we will introduce another approach to construct binary codes from linear codes over  $Z_{2^k}$ .

Firstly, we will introduce a new way to generalize the Gray map, defining a map  $\Phi : Z_{2m}^n \rightarrow 2^{Z_2^{mn}}$ , where  $2^{Z_2^{mn}}$  denotes the set of the subsets of  $Z_2^{mn}$ . Then we will define a weight function  $wt^\diamond : Z_{2m} \rightarrow R^+$  and the corresponding distance  $d^\diamond$  and we will show (**Lemma 2-5**) relations between the  $d^\diamond$ -distance of a code  $\mathcal{C} \subset Z_{2m}^n$  and the Hamming distance of the code  $\Phi(\mathcal{C})$ . Finally, we will introduce the concept of co- $Z_{2^k}$ -linear codes.

Put  $m = 2^{k-1}$ . Let  $\{H_0, \dots, H_{2m-1}\}$  be a partition of  $Z_2^m$  into extended 1-perfect  $(m, 2^m/2m, 4)$  codes (for example, we can take  $H_0$  as the extended Hamming code and  $H_0, \dots, H_{2m-1}$  as its cosets). Moreover, we assume that  $H_0$  contains the all-zero word  $\bar{0}$  and  $H_j$  is an even (odd) weighted if and only if  $j$  is even (odd).

Define the map  $\Phi : Z_{2m}^n \rightarrow 2^{Z_2^{mn}}$  by the rule

$$\Phi(x_1, \dots, x_n) \triangleq H_{x_1} \times \dots \times H_{x_n}.$$

If  $\mathcal{C} \subseteq Z_{2m}^n$ , then

$$\Phi(\mathcal{C}) \triangleq \bigcup_{\bar{x} \in \mathcal{C}} \Phi(\bar{x}).$$

*Example 2-4:* Let  $k = 3$ ,  $H_0 = \{0000, 1111\}$ ,  $\dots$ ,  $H_2 = \{1100, 0011\}$ ,  $\dots$ ,  $H_7 = \{0001, 1110\}$ . Then  $\Phi(207) = H_2 \times H_0 \times H_7 = \{1100\ 0000\ 0001, 1100\ 0000\ 1110, 1100\ 1111\ 0001, 1100\ 1111\ 1110, 0011\ 0000\ 0001, 0011\ 0000\ 1110, 0011\ 1111\ 0001, 0011\ 1111\ 1110\}$ .

Define the weight function  $wt^\diamond : Z_{2^m} \rightarrow R^+$  as

$$wt^\diamond(x) \triangleq \begin{cases} 0 & \text{if } x = 0, \\ 1 & \text{if } x \text{ is odd,} \\ 2 & \text{if } x \neq 0 \text{ is even.} \end{cases}$$

The corresponding distance  $d^\diamond$  on  $Z_{2^m}^n$  is defined by the standard way:

$$d^\diamond((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) \triangleq \sum_{i=1}^n wt^\diamond(y_i - x_i).$$

We will say that  $\mathcal{C}$  is an  $(n, M, d)^\diamond$  code if  $\mathcal{C} \subseteq Z_{2^m}^n$ ,  $|\mathcal{C}| = M$ , and the  $d^\diamond$ -distance between any two different elements of  $\mathcal{C}$  is not less than  $d$ .

*Lemma 2-5:* Let  $m \geq 4$ . If  $\mathcal{C} \subseteq Z_{2^m}^n$  is an  $(n, M, d)^\diamond$  code, then  $\Phi(\mathcal{C})$  is a binary  $(mn, M(\frac{2^m}{2})^n, \min(4, d))$  code. The proof is straightforward, and we omit it.

We call a binary code *co- $Z_{2^m}$ -linear* if its coordinates can be arranged so that it is the image of a linear  $Z_{2^m}$ -code by the map  $\Phi$ .

*Remark 2-6:* Co- $Z_{2^m}$ -linear codes can be considered as a partial case of generalized concatenated codes [7]. For this special case the code distance given by [Lemma 2-5](#) may be better than the code distance guaranteed by the generalized concatenation construction.

### III. $Z_{2^k}$ -DUALITY OF BINARY CODES

In this section we will show ([Theorem 3-4](#)) that if two binary codes are obtained from dual linear  $Z_{2^k}$ -codes by, both,  $\varphi$  and  $\Phi$  generalizations of Gray map, then these codes are formally dual, i. e., their weight enumerators satisfy the MacWilliams identity.

Let  $\mathcal{C}$  be a  $Z_{2^k}$ -linear code, the image by  $\varphi$  of a linear  $Z_{2^k}$ -code  $\mathcal{C}$  of length  $n$ . Let  $\mathcal{C}^\perp$  be the linear  $Z_{2^k}$ -code dual to  $\mathcal{C}$ . Let  $SW_{\mathcal{C}^\perp}(X, Z, T)$  be the polynomial obtained from the complete weight enumerator  $W_{\mathcal{C}^\perp}(X_0, X_1, \dots, X_{2^k-1})$  of  $\mathcal{C}^\perp$  by identifying to  $Z$  (respectively to  $T$ ) all the  $X_j$ 's such that  $j$  is odd (respectively,  $j$  is even  $\neq 0$ ).

*Lemma 3-1 ([4]):* Then we have

$$W_{\mathcal{C}}(X, Y) = \frac{1}{|\mathcal{C}^\perp|} SW_{\mathcal{C}^\perp}( X^{2^{k-1}} + Y^{2^{k-1}} + (2^k - 2)(XY)^{2^{k-2}}, \\ X^{2^{k-1}} - Y^{2^{k-1}}, \\ X^{2^{k-1}} + Y^{2^{k-1}} - 2(XY)^{2^{k-2}} ).$$

The following lemma is a known fact about the weight distribution of extended 1-perfect binary codes.

*Lemma 3-2:* Let  $H$  be an extended 1-perfect  $(m, 2^m/2m, 4)$  code; then

- $\frac{1}{|H|} W_H(X + Y, X - Y) = X^m + Y^m + (2m - 2)(XY)^{m/2}$  if  $\bar{0} \in H$ ,
- $\frac{1}{|H|} W_H(X + Y, X - Y) = X^m - Y^m$  if  $H$  is odd-weight,
- $\frac{1}{|H|} W_H(X + Y, X - Y) = X^m + Y^m - 2(XY)^{m/2}$  if  $H$  is an even-weight code and  $\bar{0} \notin H$ .

**Proposition 3-3:** Let  $\mathcal{C}$  be a  $Z_{2^k}$ -code and  $\tilde{\mathcal{C}} = \Phi(\mathcal{C})$ ; then

$$W_{\tilde{\mathcal{C}}}(X, Y) = SW_{\mathcal{C}}(W_{H_0}(X, Y), W_{H_1}(X, Y), W_{H_2}(X, Y)),$$

where  $\{H_0, \dots, H_{2m-1}\}$  is the partition of  $Z_2^m$  into extended 1-perfect codes from the definition of  $\Phi$ ,  $0 \in H_0$ ,  $H_1$  is an odd-weight code,  $H_2$  is an even-weight code,  $\bar{0} \notin H_2$

*Proof:* The statement follows almost immediately from the definition of the map  $\Phi$ . Indeed, each codeword  $\bar{z} = (z_1, \dots, z_n) \in \mathcal{C}$  adds  $SW_{z_1} \cdot \dots \cdot SW_{z_n}$  to  $SW_{\mathcal{C}}(X, Z, T)$ , where

$$\begin{aligned} SW_0 &\triangleq X, \\ SW_{2j+1} &\triangleq Z, \quad j = 0, \dots, m-1, \\ SW_{2j} &\triangleq T, \quad j = 1, \dots, m-1. \end{aligned}$$

On the other hand, as follows from the definition of the map  $\Phi$ , each codeword  $\bar{z} = (z_1, \dots, z_n) \in \mathcal{C}$  adds  $W_{H_{z_1}}(X, Y) \cdot \dots \cdot W_{H_{z_n}}(X, Y)$  to  $W_{\tilde{\mathcal{C}}}(X, Y)$ . The relations

$$\begin{aligned} W_{H_{2j+1}}(X, Y) &= W_{H_1}(X, Y), \quad j = 0, \dots, m-1, \\ W_{H_{2j}}(X, Y) &= W_{H_2}(X, Y), \quad j = 1, \dots, m-1 \end{aligned}$$

follow from **Lemma 3-2** and conclude the proof. ■

The following theorem is the main result of this section.

**Theorem 3-4:** Let  $\mathcal{C}$  and  $\mathcal{C}^\perp$  be dual linear  $Z_{2^k}$ -codes,  $C = \varphi(\mathcal{C})$  and  $\tilde{\mathcal{C}}_\perp = \Phi(\mathcal{C}^\perp)$ . Then the codes  $\mathcal{C}$  and  $\tilde{\mathcal{C}}_\perp$  are formally dual, i. e.,  $W_{\mathcal{C}}(X, Y) = \frac{1}{|\mathcal{C}^\perp|} W_{\tilde{\mathcal{C}}_\perp}(X+Y, X-Y)$ .

*Proof:* By **Lemmas 3-1 and 3-2**

$$\begin{aligned} W_{\mathcal{C}}(X, Y) &= \frac{1}{|\mathcal{C}^\perp|} SW_{\mathcal{C}^\perp} \left( \frac{1}{|H_0|} W_{H_0}(X+Y, X-Y), \frac{1}{|H_1|} W_{H_1}(X+Y, X-Y), \frac{1}{|H_2|} W_{H_2}(X+Y, X-Y) \right) \\ &= \frac{1}{|\mathcal{C}^\perp|} \left( \frac{2^m}{2^m} \right)^n SW_{\mathcal{C}^\perp} \left( W_{H_0}(X+Y, X-Y), W_{H_1}(X+Y, X-Y), W_{H_2}(X+Y, X-Y) \right). \end{aligned}$$

It remains to note that by **Lemma 2-5** we have  $|\mathcal{C}^\perp| \left( \frac{2^m}{2^m} \right)^n = |\tilde{\mathcal{C}}_\perp|$  and by **Proposition 3-3** we obtain:

$$SW_{\mathcal{C}^\perp}(W_{H_0}(X+Y, X-Y), W_{H_1}(X+Y, X-Y), W_{H_2}(X+Y, X-Y)) = W_{\tilde{\mathcal{C}}_\perp}(X+Y, X-Y). \quad \blacksquare$$

In **Sections IV and V** we will construct two  $Z_{2^k}$ -dual classes of codes: co- $Z_{2^k}$ -linear extended 1-perfect codes and  $Z_{2^k}$ -linear Hadamard codes. In the **last section** we will show the completeness of the constructions.

#### IV. CO- $Z_{2^k}$ -LINEAR EXTENDED PERFECT CODES

This section concerns extended 1-perfect codes. We first introduce the concept of  $\bar{1}$ -perfect code, which is a generalization of the concept of extended 1-perfect binary code to some nonbinary cases. As in the case of 1-perfect codes, the existence of  $\bar{1}$ -perfect codes in different spaces is independently interesting. Then, in **Subsection IV-B**, we construct a class of  $\bar{1}$ -perfect codes in  $(Z_{2^k}^n, d^\circ)$ . In **Subsection IV-C** we summarize: the images of such codes under  $\Phi$  are co- $Z_{2^k}$ -linear extended 1-perfect codes. In **Subsection IV-D** we give examples of  $\bar{1}$ -perfect codes in  $Z_{2^m}$  where  $m$  is not a power of two.



*Lemma 4-3:* The linear code  $\mathcal{H}_I \triangleq \{\bar{h} = (h_1, \dots, h_n) \in Z_{2^k}^n \mid \sum_{j=1}^n h_j \bar{b}_j = B_I \bar{h}^T = \bar{0}\}$  with the check matrix  $B_I$  is  $\bar{1}$ -perfect.

*Proof:* First we claim that

(\*) the distance 2 between codewords  $\bar{h}_1, \bar{h}_2$  from  $\mathcal{H}_I$  is impossible. Indeed, if  $d^\circ(\bar{h}_1, \bar{h}_2) = 2$ , then the codeword  $\bar{h} \triangleq \bar{h}_1 - \bar{h}_2$  have one or two nonzero positions. The first case contradicts to the fact that  $\bar{b}_i \neq \bar{0}, i = 1, \dots, n$ . In the second case we have  $\beta \bar{b}_i + \gamma \bar{b}_j = \bar{0}$  for some different  $i, j$  and odd  $\beta, \gamma$ . But the first row of  $B_I$  implies that  $\beta = -\gamma$  and, since  $\beta$  and  $\gamma$  are odd, we get  $\bar{b}_i = \bar{b}_j$ . This again contradicts to the construction of  $B_I$ . The claim (\*) is proved.

First row of  $B_I$  implies that the words of  $\mathcal{H}_I$  have even weight.

We need to check that each odd word is at the distance 1 from exactly one codeword. Let  $\bar{z} = (z_1, \dots, z_n) \in Z_{2^k}^n$  have an odd weight,  $\bar{s} \triangleq \sum_{j=1}^n z_j \bar{b}_j$ , and  $s \triangleq \sum_{j=1}^n z_j$ . Note that  $s$  is odd. Since  $s^{-1} \bar{s} \in \{1\} \times (2^{k-1} Z_{2^k})^{i_1} \times (2^{k-2} Z_{2^k})^{i_2} \times \dots \times (2^0 Z_{2^k})^{i_k}$ , there exists  $j'$  such that  $s^{-1} \bar{s} = \bar{b}_{j'}$ . Let  $\bar{z}' \in Z_{2^k}^n$  be the word with  $s$  in the  $j'$ th position and zeroes in the others. It is easy to check that  $\bar{z} - \bar{z}'$  is a codeword at the distance 1 from  $\bar{z}$ . As follows from (\*), such codeword is unique for each odd  $\bar{z}$ . ■

### C. Co- $Z_{2^k}$ -Linear Extended 1-Perfect Binary Codes

Now we have all we need to construct a class of co- $Z_{2^k}$ -linear extended 1-perfect binary codes. As we will see in [Section VI](#), the class constructed exhaust all such codes provided the mapping  $\Phi$  is fixed.

*Theorem 4-4:* The co- $Z_{2^k}$ -linear code  $\tilde{H}_I \triangleq \Phi(\mathcal{H}_I)$  is a binary  $(nm, 2^{nm}/2nm, 4)$  code, i. e., an extended 1-perfect code.

*Proof:* The statement follows directly from [Lemma 2-5](#), [Proposition 4-1](#), and [Lemma 4-3](#). ■

### D. Note On The General Case $Z_{2^m}$

Indeed,  $\bar{1}$ -perfect codes can be constructed over  $Z_{2^m}$  with  $d^\circ$ -distance for each  $m \geq 1$ , see the following examples. Since  $m = 2^\mu$  is a necessary condition for constructing binary codes using the way of [Subsection II-B](#), the classification of  $\bar{1}$ -perfect codes in the other cases is out of view of this paper.

*Example 4-5:* The codes with the check matrices

$$B' \triangleq \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 12 & 12 & 12 \\ 0 & 6 & 12 & 18 & 0 & 6 & 12 & 18 \end{pmatrix},$$

$$B'' \triangleq \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 8 & 12 & 16 & 20 \end{pmatrix}$$

are  $\bar{1}$ -perfect codes over  $Z_{2^4}$  with  $d^\circ$ -distance.

## V. $Z_{2^k}$ -LINEAR HADAMARD CODES

*Lemma 5-1:* Let  $\mathcal{H}$  be a linear code in  $Z_{2^k}^n$ . Then  $\mathcal{H}$  is an  $(n, n2^k, n2^{k-2})^*$  code if and only if  $\mathcal{H}^\perp$  is a  $\bar{1}$ -perfect code in  $(Z_{2^k}^n, d^\circ)$ .

*Proof:* Assume the code  $\mathcal{H}$  has parameters  $(n, n2^k, n2^{k-2})^*$ . Then  $\varphi(\mathcal{H})$  has the parameters of an Hadamard code, see [Corollary 2-2](#). By [Theorem 3-4](#) the code  $\Phi(\mathcal{H}^\perp)$  is formally dual to the Hadamard code  $\varphi(\mathcal{H})$ , i. e.,  $\Phi(\mathcal{H}^\perp)$  is an extended 1-perfect code. Then the cardinality and the minimal  $d^\circ$ -distance 4 of the code  $\mathcal{H}^\perp$  follow from [Lemma 2-5](#).

The reverse statement can be proved by reversing the arguments. ■

The next theorem follows immediately from [Lemmas 4-3](#) and [5-1](#).

*Theorem 5-2:* The code  $\mathcal{D}_I \triangleq \mathcal{H}_I^\perp$  is a linear  $(n, n2^k, n2^{k-2})^*$  code with the generator matrix  $B_I$ . The  $Z_{2^k}$ -linear code  $D_I \triangleq \varphi(\mathcal{D}_I)$  is a binary  $(n2^{k-1}, n2^k, n2^{k-2})$  code, i. e., an Hadamard code.

*Remark 5-3:* The code  $\mathcal{D}_{(r,0,\dots,0)}$  is the *first order Reed-Muller code* over  $Z_{2^k}$  [16].

*Remark 5-4:* Indeed, if an Hadamard code  $A$  of length  $m$  exists (see **Subsection II-A**), then  $Z_{2^m}$ -linear Hadamard code can be constructed for length  $nm = 2^r m$ , even if  $m$  is not a power of two. For example, the linear  $Z_{24}$ -code with the generator matrix  $B'$  from **Example 4-5** has parameters  $(16, 192, 48)^*$  and the corresponding binary  $Z_{24}$ -linear code has parameters  $(96, 192, 48)$ , i. e., the parameters of an Hadamard code of length 96.

However, the code with the generator matrix  $B''$  (**Example 4-5**) has parameters  $(6, 144, 30)^*$ , corresponding a binary  $(72, 144, 30)$  code. The code distance of this code is smaller than the code distance of an Hadamard code with the same length and cardinality.

## VI. NONEXISTENCE OF UNKNOWN CO- $Z_{2^k}$ -LINEAR EXTENDED PERFECT CODES AND $Z_{2^k}$ -LINEAR HADAMARD CODES

Let  $n$  be a power of 2. In this section we will show (**Theorem 6-2**) that each linear  $(n, 2^{kn}/n2^k, 4)^\diamond$  code in  $Z_{2^k}^n$  is equivalent to a code from the class constructed in **Section IV**. Similarly, each linear  $(n, n2^k, n2^{k-2})^*$  code in  $Z_{2^k}^n$  is equivalent to a code from the class constructed in **Section V** (**Theorem 6-3**). The key moment of the proof is **Lemma 6-4**. The partial  $Z_4$  case of this lemma was proved in [10] and in [13], but the proof given here is not similar.

We say that two linear codes  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \subseteq Z_{2^k}^n$  are *equivalent* if  $\mathcal{C}_2 = \bar{z} \circ \pi \mathcal{C}_1$  where  $\pi$  is a coordinate permutation,  $\bar{z} \in (Z_{2^k}^*)^n \triangleq \{1, 3, \dots, 2^k-1\}^n$ , and  $\circ$  is the coordinate-wise product defined as  $(z_1, \dots, z_n) \circ (x_1, \dots, x_n) \triangleq (z_1 x_1, \dots, z_n x_n)$ . Note that both operations  $\pi$  and  $\bar{z} \circ$  are group automorphisms of the additive group of  $Z_{2^k}^n$  and isometries of the metric spaces  $(Z_{2^k}^n, d^*)$  and  $(Z_{2^k}^n, d^\circ)$ . The following proposition shows that there are no other linear isometries of  $(Z_{2^k}^n, d^*)$  or  $(Z_{2^k}^n, d^\circ)$ , and thus our definition of the equivalence is natural.

*Proposition 6-1:* Assume that  $\Gamma$  is a linear transformation of  $Z_{2^k}^n$  and isometry of  $(Z_{2^k}^n, d)$  where  $d = d^*$  or  $d = d^\circ$ . Then  $\Gamma(\bar{x}) \equiv \bar{z} \circ \pi(\bar{x})$  where  $\pi$  is a coordinate permutation, and  $\bar{z} \in (Z_{2^k}^*)^n$ .

*Proof:* Denote by  $\bar{e}_i$  the word with 1 in  $i$ th position and zeroes in the other positions. It is enough to check that for each  $i$  we have  $\Gamma(\bar{e}_i) \equiv z_j \bar{e}_j$  with some  $j = \pi(i)$  and  $z_j \in Z_{2^k}^*$ . Indeed, from the isometric properties of  $\Gamma$  we derive that  $\Gamma(\bar{e}_i)$  has only one non-zero coordinate. On the other hand, this coordinate belongs to  $Z_{2^k}^*$ , because  $\Gamma$  is a bijection. ■

The following two theorems are the main results of this section. Remind that the codes  $\mathcal{H}_I$  and  $\mathcal{D}_I$  are defined in **Sections IV and V**.

*Theorem 6-2:* Let  $\mathcal{H} \subset Z_{2^k}^n$  be a linear  $\bar{1}$ -perfect code. Then  $\mathcal{H}$  is equivalent to  $\mathcal{H}_I$  where  $I = (i_1, \dots, i_k)$  is a collection of nonnegative integers such that  $1i_1 + 2i_2 + \dots + ki_k = \log_2 n$ .

*Theorem 6-3:* Let  $\mathcal{D} \subset Z_{2^k}^n$  be a linear  $(n, n2^k, n2^{k-2})^*$  code. Then  $\mathcal{D}$  is equivalent to  $\mathcal{D}_I$ , where  $I = (i_1, \dots, i_k)$  is a collection of nonnegative integers such that  $1i_1 + 2i_2 + \dots + ki_k = \log_2 n$ .

By **Lemma 5-1** it is enough to prove only one of **Theorems 6-2, 6-3**. We need the following auxiliary result.

*Lemma 6-4:* If  $\mathcal{D}$  is a linear  $(n, n2^k, n2^{k-2})^*$  code in  $Z_{2^k}^n$ , then  $\mathcal{D}$  contains an element from  $(Z_{2^k}^*)^n$ .

*Proof:* We prove the lemma by induction. If  $n = 1$ , then  $\mathcal{D} = Z_{2^k}$ . Assume  $n > 1$ .

(\*) *We claim that  $\mathcal{D}$  contains an element from  $\{0, 2^{k-1}\}^n$  of weight  $n2^{k-2}$ .* Let  $\bar{x}'$  and  $\bar{x}''$  be two linear independent elements in  $\mathcal{D}$  of order  $2m'$  and  $2m''$  respectively. This means that  $m'\bar{x}'$  and  $m''\bar{x}''$  are different nonzero elements from  $\mathcal{D} \cap \{0, 2^{k-1}\}^n$ . Since  $\varphi$  is an isometric imbedding (see **Proposition 2-1**) and  $\varphi(\mathcal{D})$  is an  $(n2^{k-1}, n2^k, n2^{k-2})$  Hadamard code, the only possible values of  $wt^*$ -weight of elements in  $\mathcal{D}$  are 0,  $n2^{k-2}$  and  $n2^{k-1}$ . So, at least one of  $m'\bar{x}'$  and  $m''\bar{x}''$  has weight  $n2^{k-2}$ . The claim (\*) is proved.

Without loss of generality assume that  $\bar{a} \triangleq (2^{k-1}, \dots, 2^{k-1}, 0, \dots, 0) \in \mathcal{D}$ .

Let us consider two codes obtained from  $\mathcal{D}$  by puncturing  $n/2$  coordinates:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_1 &\triangleq \{\bar{z}' \in Z_{2^k}^{n/2} \mid \exists \bar{z}'' \in Z_{2^k}^{n/2} : (\bar{z}', \bar{z}'') \in \mathcal{D}\}, \\ \mathcal{D}_2 &\triangleq \{\bar{z}'' \in Z_{2^k}^{n/2} \mid \exists \bar{z}' \in Z_{2^k}^{n/2} : (\bar{z}', \bar{z}'') \in \mathcal{D}\}. \end{aligned}$$



(\*\*) We claim that  $\mathcal{D}_1$  and  $\mathcal{D}_2$  are linear  $(n/2, n2^{k-1}, n2^{k-3})^*$  codes. The linearity of the codes is obvious. The code distance follows from the fact that the distance between  $\bar{a}$  and any element  $\bar{z} \in \mathcal{D}$  is 0,  $n2^{k-2}$  or  $n2^{k-1}$ . It is true that  $|\mathcal{D}_1| \geq |\mathcal{D}|/2$  because the code distance of  $\mathcal{D}$  permits of only one nonzero codeword with zeroes in the first  $n/2$  coordinates. On the other hand, such a codeword exists:  $(0, \dots, 0, 2^{k-1}, \dots, 2^{k-1}) = (2^{k-1}, \dots, 2^{k-1}) + \bar{a} \in \mathcal{D}$ . So,  $|\mathcal{D}_1| = |\mathcal{D}|/2 = n2^{k-1}$ . Similarly, we get  $|\mathcal{D}_2| = n2^{k-1}$ . The claim (\*\*) is proved.

By the assumption of induction  $\mathcal{D}_1$  contains an element  $\bar{u}'$  from  $(Z_{2^k}^*)^{n/2}$ . This means that there exist  $\bar{u}''$  from  $Z_{2^k}^{n/2}$  such that  $(\bar{u}', \bar{u}'') \in \mathcal{D}$ . Since  $wt^*(2^{k-1}(\bar{u}', \bar{u}'')) \in \{n2^{k-2}, n2^{k-1}\}$  and  $2^{k-1}\bar{u}' = (2^{k-1}, \dots, 2^{k-1})$ , we have  $wt^*(2^{k-1}\bar{u}'') = 0$  or  $wt^*(2^{k-1}\bar{u}'') = n2^{k-2}$ . So,

$$2^{k-1}\bar{u}'' = (0, \dots, 0), \quad (1)$$

$$\text{or } 2^{k-1}\bar{u}'' = (2^{k-1}, \dots, 2^{k-1}). \quad (2)$$

Similarly, considering the code  $\mathcal{D}_2$ , we can find a codeword  $(\bar{v}', \bar{v}'') \in \mathcal{D}$  such that  $2^{k-1}\bar{v}'' = (2^{k-1}, \dots, 2^{k-1})$  and  $v'$  satisfies

$$2^{k-1}\bar{v}' = (0, \dots, 0), \quad (3)$$

$$\text{or } 2^{k-1}\bar{v}' = (2^{k-1}, \dots, 2^{k-1}). \quad (4)$$

If (2) is true, then  $(u', u'') \in (Z_{2^k}^*)^n \cap \mathcal{D}$ . If (4) is true, then  $(v', v'') \in (Z_{2^k}^*)^n \cap \mathcal{D}$ . If (1) is true and (3) is true, then  $(u', u'') + (v', v'') \in (Z_{2^k}^*)^n \cap \mathcal{D}$ . **Lemma 6-4** is proved. ■

*Proof of Theorem 6-3:* By **Lemma 6-4** the code  $\mathcal{D}$  contains an element  $\bar{c} = (c_1, \dots, c_n)$  from  $(Z_{2^k}^*)^n$ . Then the code  $\mathcal{D}' \triangleq (c_1^{-1}, \dots, c_n^{-1}) \circ \mathcal{D}$  is equivalent to  $\mathcal{D}$  and contains  $\bar{1} = (1, \dots, 1)$ . Let  $\{\bar{1}, q_1, \dots, q_s\}$  be a basis of  $\mathcal{D}'$  and  $i_j$  be the number of elements of order  $2^j$ ,  $j = 1, \dots, k$ . Assume  $\bar{1}, q_1, \dots, q_s$  are the rows of the matrix  $Q$  of size  $(1 + i_1 + \dots + i_k) \times n$ , a generator matrix of the code  $\mathcal{D}'$ . Then the columns of  $Q$  are elements of  $\{1\} \times (2^{k-1}Z_{2^k})^{i_1} \times (2^{k-2}Z_{2^k})^{i_2} \times \dots \times (2^0Z_{2^k})^{i_k}$ . Since by **Lemma 5-1** the code  $\mathcal{D}'^\perp$  is more than 2, all the columns are pairwise different. Therefore  $Q$  coincides with  $B_I$ ,  $I = (i_1, \dots, i_k)$ , up to permutation of columns. ■

So, we conclude, provided the mappings  $\varphi$  and  $\Phi$  are fixed, all up to equivalence co- $Z_{2^k}$ -linear extended 1-perfect codes and  $Z_{2^k}$ -linear Hadamard codes are described in **Sections IV and V**.

## REFERENCES

- [1] A. A. Nechaev, "Trace-function in Galois ring and noise-stable codes," in *Proc. V All-Union Symp. on Theory of Rings, Alg. and Mod.*, Novosibirsk, Russia, 1982, p. 97, in Russian.
- [2] A. A. Nechaev, "Kerdock code in a cyclic form," *Discrete Math. Appl.*, vol. 1, no. 4, pp. 365–384, 1991. Translated from *Diskretnaya Matematika*, 1(4): 123–139, 1989.
- [3] A. R. J. Hammons, P. V. Kumar, A. R. Calderbank, N. J. A. Sloane, and P. Solé, "The  $Z_4$ -linearity of Kerdock, Preparata, Goethals, and related codes," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 40, no. 2, pp. 301–319, 1994. DOI: [10.1109/18.312154](https://doi.org/10.1109/18.312154)
- [4] C. Carlet, " $Z_{2^k}$ -linear codes," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 44, no. 4, pp. 1543–1547, 1998. DOI: [10.1109/18.681328](https://doi.org/10.1109/18.681328)
- [5] T. Honold and A. A. Nechaev, "Fully weighted modules and representations of codes," *Probl. Inform. Transm.*, vol. 35, no. 3, pp. 205–223, 1999. Translated from *Probl. Peredachi Inf.*, 35(3): 18–39, 1999.
- [6] I. Constantinescu and W. Heise, "A metric for codes over residue class rings of integers," *Probl. Inform. Transm.*, vol. 33, no. 3, pp. 208–213, 1997. Translated from *Probl. Peredachi Inf.*, 33(3): 22–28, 1997.
- [7] V. A. Zinoviev, "Generalized concatenated codes," *Probl. Inform. Transm.*, vol. 12, no. 1, pp. 2–9, 1976. Translated from *Probl. Peredachi Inf.*, 12(1): 5–15, 1976.
- [8] J. Rifa and J. Pujol, "Translation-invariant propelinear codes," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 43, no. 2, pp. 590–598, 1997. DOI: [10.1109/18.556115](https://doi.org/10.1109/18.556115)
- [9] J. Borges and J. Rifa, "A characterization of 1-perfect additive codes," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 45, no. 8, pp. 1688–1697, 1999. DOI: [10.1109/18.771247](https://doi.org/10.1109/18.771247)
- [10] D. S. Krotov, " $Z_4$ -linear perfect codes," *Diskr. Analiz i Issled. Operatsii, Ser.1*, vol. 7, no. 4, pp. 78–90, 2000, in Russian. English translation: [arXiv:0710.0198](https://arxiv.org/abs/0710.0198)
- [11] D. S. Krotov, " $Z_4$ -linear Hadamard and extended perfect codes," *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, vol. 6, pp. 107–112, 2001. DOI: [10.1016/S1571-0653\(04\)00161-1](https://doi.org/10.1016/S1571-0653(04)00161-1) [arXiv:0710.0199](https://arxiv.org/abs/0710.0199)
- [12] K. T. Phelps and J. Rifa, "On binary 1-perfect additive codes: Some structural properties," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 48, no. 9, pp. 2587–2592, 2002. DOI: [10.1109/TIT.2002.801474](https://doi.org/10.1109/TIT.2002.801474)
- [13] J. Borges, K. T. Phelps, and J. Rifa, "The rank and kernel of extended 1-perfect  $Z_4$ -linear and additive non- $Z_4$ -linear codes," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 49, no. 8, pp. 2028–2034, 2003. DOI: [10.1109/TIT.2003.814490](https://doi.org/10.1109/TIT.2003.814490)

- [14] K. T. Phelps, J. Rifa, and M. Villanueva, "Rank and kernel of additive ( $Z_4$ -linear and non- $Z_4$ -linear) Hadamard codes," in *Proc. Ninth Int. Workshop on Algebraic and Combinatorial Coding Theory ACCT'2004*, Kranevo, Bulgaria, June 2004, pp. 327–332.
- [15] K. T. Phelps, J. Rifa, and M. Villanueva, "On the additive ( $Z_4$ -linear and non- $Z_4$ -linear) Hadamard codes. Rank and kernel," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 52, no. 1, pp. 316–319, 2006. DOI: [10.1109/TIT.2005.860452](https://doi.org/10.1109/TIT.2005.860452)
- [16] M. K. Gupta, M. C. Bhandari, and A. K. Lal, "On linear codes over  $Z_{2^s}$ ," *Des. Codes Cryptography*, vol. 36, no. 3, pp. 227–244, 2005. DOI: [10.1007/s10623-004-1717-1](https://doi.org/10.1007/s10623-004-1717-1)
- [17] F. I. Solov'eva, "On the construction of transitive codes," *Probl. Inform. Transm.*, vol. 41, no. 3, pp. 204–211, 2005. DOI: [10.1007/s11122-005-0025-3](https://doi.org/10.1007/s11122-005-0025-3) Translated from *Probl. Peredachi Inf.*, 41(3): 23–31, 2005.
- [18] F. J. MacWilliams and N. J. A. Sloane, *The Theory of Error-Correcting Codes*. Amsterdam, Netherlands: North Holland, 1977.
- [19] R. Ahlswede, H. K. Aydinian, and L. K. Khachatrian, "On perfect codes and related concepts," *Des. Codes Cryptography*, vol. 22, no. 3, pp. 221–237, 2001. DOI: [10.1023/A:1008394205999](https://doi.org/10.1023/A:1008394205999)

# О $Z_{2^k}$ -дуальных двоичных кодах

Д. С. Кротов

## Аннотация

Представлено новое обобщение отображения Грея  $\Phi : Z_{2^k}^n \rightarrow Z_2^{2^{k-1}n}$ , связанное с известным обобщенным отображением Грея  $\varphi$  следующим образом: если взять два дуальных линейных  $Z_{2^k}$ -кода и построить из них двоичные коды, используя обобщения  $\varphi$  и  $\Phi$  отображения Грея, то весовые эnumераторы полученных двоичных кодов будут связаны тождеством Мак-Вильямс. Описаны классы  $Z_{2^k}$ -линейных кодов Адамара и ко- $Z_{2^k}$ -линейных расширенных 1-совершенных кодов, где ко- $Z_{2^k}$ -линейность означает, что код может быть получен из линейного  $Z_{2^k}$ -кода при помощи нового обобщенного отображения Грея.

Ключевые слова: отображение Грея, код Адамара, тождество Мак-Вильямс, совершенный код,  $Z_{2^k}$ -линейность

## 1 Введение

Как обнаружено в [1], [2], некоторые нелинейные двоичные коды представимы как линейные коды над кольцом  $Z_4$ . Вариант такого представления, найденный в [3], использует *отображение Грея*  $\phi : 0 \rightarrow 00, 1 \rightarrow 01, 2 \rightarrow 11, 3 \rightarrow 10$  для построения двоичных так называемых  $Z_4$ -линейных кодов из кодов в четырехбуквенном алфавите. Ключевое свойство отображения  $\phi$  с этой точки зрения — что оно является изометрией между  $Z_4$  с метрикой Ли и  $Z_2^2$  с метрикой Хемминга. В работе [4] (и, в более общей форме, в [5]) отображение Грея обобщено для построения  $Z_{2^k}$ -линейных кодов. Обобщенное отображение Грея (скажем,  $\varphi$ ; см. [Подраздел 2.1](#) для напоминания основных фактов об обобщенном отображении Грея) является изометричным вложением  $Z_{2^k}$  с метрикой, определяемой однородной весовой функцией [6], в  $Z_2^{2^{k-1}}$  с метрикой Хемминга.

В настоящей статье мы представляем другое обобщение  $\Phi$  отображения Грея ([Подраздел 2.2](#)). Это отображение оказалось дуальным предыдущему в следующем смысле. Если  $\mathcal{C}$  и  $\mathcal{C}^\perp$  — дуальные линейные  $Z_{2^k}$ -коды, то двоичный  $Z_{2^k}$ -линейный код  $\varphi(\mathcal{C})$  и ко- $Z_{2^k}$ -линейный код  $\Phi(\mathcal{C}^\perp)$  формально дуальны. Формальная дуальность означает, что весовые эnumераторы этих двух кодов удовлетворяют тождеству Мак-Вильямс ([Раздел 3](#)) (заметим, что эти коды в общем случае могут быть нелинейными,

---

Это авторский перевод статьи в IEEE Transactions on Information Theory 53(4) 2007, 1532–1537, Digital Object Identifier [10.1109/TIT.2007.892787](https://doi.org/10.1109/TIT.2007.892787), ©2007 IEEE.

Результаты работы частично докладывались на 4й Международной конференции по оптимальным кодам и смежным вопросам ОС 2005 (Пампорово, Болгария, июнь 2005).

Адрес автора: Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, проспект Академика Коптюга 4, Новосибирск 630090, Россия (e-mail: [krotov@math.nsc.ru](mailto:krotov@math.nsc.ru)).

и тогда они не могут быть дуальными в обычном смысле, как подпространства двоичного векторного пространства). Таким образом, мы решаем проблему дуальности для  $Z_{2^k}$ -линейных двоичных кодов: связать весовые эnumераторы двоичных образов дуальных линейных кодов над  $Z_{2^k}$ . Эта проблема не могла быть решена посредством только стандартного обобщенного отображения Грея  $\varphi$ , поскольку, как замечено в [4], весовые эnumераторы кодов  $\varphi(\mathcal{C})$  и  $\varphi(\mathcal{C}^\perp)$  в общем случае не являются связанными, в отличие от случая  $Z_4$ -линейных кодов.

В [5] показано, что двоичные (и не только двоичные) коды могут быть представлены как групповые коды над различными группами. Такие представления используют особую *масштабную изометрию* ( $\varphi$  — частный случай такой изометрии), действующую изометрично из некоторого модуля со специально определенной метрикой в двоичное (или, в общем случае, не только двоичное) пространство Хемминга. С таким подходом каждый элемент модуля соответствует одному кодовому слову,  $Z_{2^k}$ -линейные коды являются частным случаем подобного представления.

В нашем подходе каждый элемент модуля (слово) соответствует некоторому множеству кодовых слов, являющемуся декартовым произведением множеств, соответствующих (посредством специального отображения) символам слова модуля. В конструктивной части этот подход может быть представлен обобщенной каскадной конструкцией [7], но кодовое расстояние полученного кода отличается от конструктивного расстояния обобщенного каскадного кода. Вычисляя расстояние, мы используем определенные изометрические свойства отображения, которое может быть рассмотрено как некоторый аналог масштабной изометрии. Отображение  $\Phi$ , рассматриваемое в настоящей работе, позволяет строить только коды с расстоянием не больше 4, но общий подход может иметь больший потенциал.

Новый способ обобщения отображения Грея (Подраздел 2.2) и его дуальность (Раздел 3) «старому способу» — основные результаты первой части работы. Вторая часть (Разделы 4 – 6) посвящена построению ко- $Z_{2^k}$ -линейных и  $Z_{2^k}$ -линейных кодов с параметрами расширенных 1-совершенных кодов и кодов Адамара. В серии статей (напр. [8], [9], [10], [11], [12], [13], [14], [15], [16]) рассматриваются 1-совершенные (или расширенные 1-совершенные) коды и коды Адамара, являющиеся линейными в некотором нестандартном смысле (отметим, что для каждого из рассматриваемых значений кодовых параметров существует только один, с точностью до эквивалентности, линейный код). Пользуясь двумя обобщенными отображениями Грея  $\varphi$  и  $\Phi$ , мы строим широкий класс таких кодов. Некоторые естественные вопросы о построенных кодах остаются открытыми для дальнейшего исследования: какие из этих кодов эквивалентны друг другу или другим известным кодам; какие из них являются пропелинейными (см. определение в [8]) или по крайней мере транзитивными (см. определение и некоторые конструкции транзитивных 1-совершенных кодов в [17]); установить границы размерности ядра и ранга этих кодов (размерность ядра и ранг — хорошие меры линейности нелинейных кодов в классическом двоичном случае; для  $Z_4$ -линейных расширенных 1-совершенных кодов и кодов Адамара эти параметры вычислены в работах [10], [11], [13], [14], [15]); и т. д.

В Разделе 4 мы строим ко- $Z_{2^k}$ -линейные расширенные 1-совершенные  $(n, 2^n/2n, 4)$ -коды. Как отмечено выше, кодовое расстояние ко- $Z_{2^k}$ -линейного кода не может превышать 4 при  $k > 2$  (см. Лемму 2-5). Таким образом, расширенный 1-совершенный код — наилучшие примеры.

Как следствие, дуальное расстояние  $Z_{2^k}$ -линейных кодов ( $k > 2$ ) также не превышает 4. Наилучшие примеры — коды с большим кодовым расстоянием. В Разделе 5 мы строим  $Z_{2^k}$ -линейные коды с параметрами  $(n, 2n, n/2)$ , т. е. коды Адамара. Они  $Z_{2^k}$ -дуальны расширенным 1-совершенным кодам из Раздела 4, т. е.,  $\varphi$ - и, соответственно,  $\Phi$ - прообразы построенных расширенных 1 совершенных кодов и кодов Адамара являются дуальными  $Z_{2^k}$ -кодами.

Описанные конструкции обобщают конструкции  $Z_4$ -линейных расширенных 1-совершенных кодов и кодов Адамара [10], [11] (см. также [13]).

Естественный вопрос — является ли приведенная конструкция ко- $Z_{2^k}$ -линейных расширенных 1-совершенных кодов и  $Z_{2^k}$ -линейных кодов Адамара полной или нет. В Разделе 6 мы показываем, что ответ положительный: все ко- $Z_{2^k}$ -линейные расширенные 1-совершенные коды и все  $Z_{2^k}$ -линейные коды Адамара эквивалентны кодам, построенным в Разделах 4 и 5.

## 2 Определения и основные факты. Два обобщения отображения Грея

Мы будем использовать следующие общие обозначения. *Двоичный*  $(n, M, d)$ -код — подмножество мощности  $M$  множества  $Z_2^n = Z_2 \times \dots \times Z_2$  с расстоянием не меньше  $d$  между каждыми двумя различными элементами (*кодowymi словами*);  $n$  называется *длиной* кода,  $d$  — *кодowym расстоянием*. Двоичный  $(n, 2n, n/2)$ -код называется *кодом Адамара*; такие коды существуют если и только если существуют матрицы Адамара размера  $n \times n$ , т. е. как минимум  $n \equiv 0 \pmod{4}$  при  $n > 2$ , см. напр. [18]. Линейный код Адамара известен также как код Рида-Маллера первого порядка, в этом случае  $n$  — степень двойки. Двоичные  $(n, 2^n/2n, 4)$ -коды называются *расширенными 1-совершенными кодами*; они существуют если и только если  $n$  является степенью двойки. Такой код всегда является расширением некоторого  $(n-1, 2^n/2n, 3)$ -кода, который называется 1-совершенным, таким образом, изучение расширенных 1-совершенных двоичных кодов суть альтернативный подход к изучению 1-совершенных двоичных кодов. Для каждой допустимой длины существует только один, с точностью до перестановки координат, линейный (расширенный) 1-совершенный код и, при  $n > 8$ , много нелинейных, классификация которых в настоящее время является открытой проблемой. В следующих подразделах мы определим основные понятия, которые будут использоваться в статье: две весовые функции в  $Z_{2^k}$ , две соответствующие метрики, два обобщенных отображения Грея  $\varphi$  и  $\Phi$ , понятия  $Z_{2^k}$ -линейных и ко- $Z_{2^k}$ -линейных кодов, сформулируем простые но фундаментальные утверждения об изометрических свойствах отображений  $\varphi$  и  $\Phi$ .

### 2.1 $Z_{2^m}$ -Линейные коды

В этом подразделе мы напомним основные определения и факты об обобщенном отображении Грея и  $Z_{2^k}$ -линейных кодах [4], [5].

Пусть  $m \geq 2$  — такое целое число, при котором существует матрица Адамара размера  $m \times m$ . Пусть  $A \subset Z_2^m$  есть  $(m, 2m, m/2)$ -код Адамара и  $A = \{a_0, a_1, \dots, a_{2m-1}\}$ , где  $a_0$  есть слово из всех нулей и  $a_i + a_{i+m}$  есть слово из всех единиц для каждого  $i$

от 0 до  $m - 1$ . Определим обобщенное отображение Грея  $\varphi : Z_{2m}^n \rightarrow Z_2^{mn}$  следующим правилом:

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) \triangleq (a_{x_1}, \dots, a_{x_n}).$$

Весовую функцию  $wt^* : Z_{2m} \rightarrow R^+$  определим равенством

$$wt^*(x) \triangleq \begin{cases} 0 & \text{если } x = 0, \\ m & \text{если } x = m, \\ m/2 & \text{если } x \neq 0, m. \end{cases}$$

В случае, когда  $m$  — степень двойки, функция  $wt^*$  является *однородным весом*, представленным в [6] для более общего класса колец. Соответствующее расстояние  $d^*$  в  $Z_{2m}^n$  определяется стандартным способом:

$$d^*((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) \triangleq \sum_{i=1}^n wt^*(y_i - x_i).$$

**Предложение 2-1 ([5]).** *Отображение  $\varphi$  является изометричным вложением  $(Z_{2m}^n, d^*)$  в  $(Z_2^{mn}, d)$ , т. е.  $d^*(\bar{x}, \bar{y}) = d(\varphi(\bar{x}), \varphi(\bar{y}))$ , где  $d(\cdot, \cdot)$  — расстояние Хемминга.*

Если  $\mathcal{C} \subseteq Z_{2m}^n$ , то

$$\varphi(\mathcal{C}) \triangleq \{\varphi(\bar{x}) \mid \bar{x} \in \mathcal{C}\}.$$

Будем говорить, что  $\mathcal{C}$  есть  $(n, M, d)^*$ -код, если  $\mathcal{C} \subseteq Z_{2m}^n$ ,  $|\mathcal{C}| = M$  и  $d^*$ -расстояние между любыми двумя различными элементами  $\mathcal{C}$  не меньше  $d$ .

**Следствие 2-2.** *Если  $\mathcal{C}$  является  $(n, M, d)^*$ -кодом, то  $\varphi(\mathcal{C})$  — двоичный  $(mn, M, d)$ -код.*

Двоичный код называется  $Z_{2m}$ -линейным, если его координаты могут быть упорядочены таким образом, что он является образом некоторого линейного  $Z_{2m}$ -кода под действием отображения  $\varphi$ . Как отмечено в [4], длина  $Z_{2m}$ -линейного кода должна делиться на  $m$ , а вес каждого кодового слова должен делиться на  $m/2$ .

**Замечание 2-3.** Отображение  $\varphi$  и понятие  $Z_{2m}$ -линейности, приведенное выше, зависит от выбора кода Адамара  $A$  и единственное ограничение на  $m$  — существование матрицы Адамара размера  $m \times m$ . Ранее [4] (и в двоичном подслучае в [5, Раздел D]) рассматривался только случай  $m = 2^{k-1}$  и в качестве  $A$  брался код  $R(1, k - 1)$ , код Рида-Маллера первого порядка.

## 2.2 Ко- $Z_{2^k}$ -линейные коды

В этом подразделе мы предложим другой подход к построению двоичных кодов из линейных кодов над  $Z_{2^k}$ .

Сначала мы представим новый способ обобщить отображение Грея, определив отображение  $\Phi : Z_{2m}^n \rightarrow 2^{Z_2^{mn}}$ , где  $2^{Z_2^{mn}}$  обозначает множество всех подмножеств  $Z_2^{mn}$ . Затем мы определим весовую функцию  $wt^\diamond : Z_{2m} \rightarrow R^+$  и соответствующее расстояние  $d^\diamond$  и установим (**Лемма 2-5**) связь между  $d^\diamond$ -расстоянием кода  $\mathcal{C} \subseteq Z_{2m}^n$  и расстоянием Хемминга кода  $\Phi(\mathcal{C})$ . Наконец, мы определим понятие ко- $Z_{2^k}$ -линейного кода.

Положим  $m = 2^{k-1}$ . Пусть  $\{H_0, \dots, H_{2m-1}\}$  — разбиение  $Z_2^m$  на расширенные 1-совершенные  $(m, 2^m/2m, 4)$ -коды (например, в качестве  $H_0$  мы можем взять расширенный код Хемминга а в качестве остальных частей — смежные классы по нему). Более того, будем полагать, что  $H_0$  содержит слово из всех нулей  $\bar{0}$  и четность весов кодовых слов из  $H_j$  совпадает с четностью  $j$ .

Определим отображение  $\Phi : Z_{2m}^n \rightarrow 2^{Z_2^{mn}}$  по правилу

$$\Phi(x_1, \dots, x_n) \triangleq H_{x_1} \times \dots \times H_{x_n}.$$

Если  $\mathcal{C} \subseteq Z_{2m}^n$ , то

$$\Phi(\mathcal{C}) \triangleq \bigcup_{\bar{x} \in \mathcal{C}} \Phi(\bar{x}).$$

**Пример 2-4.** Пусть  $k = 3$ ,  $H_0 = \{0000, 1111\}$ , ...,  $H_2 = \{1100, 0011\}$ , ...,  $H_7 = \{0001, 1110\}$ . Тогда

$$\begin{aligned} \Phi(207) &= H_2 \times H_0 \times H_7 \\ &= \{1100\ 0000\ 0001, 1100\ 0000\ 1110, 1100\ 1111\ 0001, 1100\ 1111\ 1110, \\ &\quad 0011\ 0000\ 0001, 0011\ 0000\ 1110, 0011\ 1111\ 0001, 0011\ 1111\ 1110\}. \end{aligned}$$

Определим весовую функцию  $wt^\diamond : Z_{2m} \rightarrow R^+$  следующим образом:

$$wt^\diamond(x) \triangleq \begin{cases} 0 & \text{если } x = 0, \\ 1 & \text{если } x \text{ нечетно,} \\ 2 & \text{если } x \neq 0 \text{ четно.} \end{cases}$$

Соответствующее расстояние  $d^\diamond$  в  $Z_{2m}^n$  определяется стандартным образом:

$$d^\diamond((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) \triangleq \sum_{i=1}^n wt^\diamond(y_i - x_i).$$

Будем говорить, что  $\mathcal{C}$  есть  $(n, M, d)^\diamond$ -код, если  $\mathcal{C} \subseteq Z_{2m}^n$ ,  $|\mathcal{C}| = M$  и  $d^\diamond$ -расстояние между любыми двумя различными элементами из  $\mathcal{C}$  не меньше  $d$ .

**Лемма 2-5.** Пусть  $m \geq 4$ . Если  $\mathcal{C} \subseteq Z_{2m}^n$  есть  $(n, M, d)^\diamond$ -код, то  $\Phi(\mathcal{C})$  — двоичный  $(mn, M(\frac{2^m}{2m})^n, \min(4, d))$ -код.

Доказательство состоит в непосредственной проверке, и мы опустим его.

Назовем двоичный код *ко- $Z_{2m}$ -линейным*, если его координаты могут быть упорядочены таким образом, чтобы он являлся образом некоторого линейного  $Z_{2m}$ -кода при отображении  $\Phi$ .

**Замечание 2-6.** Ко- $Z_{2m}$ -линейные коды могут быть рассмотрены как частный случай обобщенных каскадных кодов [7]. Для этого особого случая кодовое расстояние согласно **Леммы 2-5** может быть больше расстояния, которое гарантирует обобщенная каскадная конструкция.

### 3 $Z_{2^k}$ -Дуальность двоичных кодов

В этом разделе мы покажем (**Теорема 3-4**), что если два кода получены из дуальных  $Z_{2^k}$ -кодов посредством обобщений  $\varphi$  (один код) и  $\Phi$  (другой) отображения Грея, то

эти коды являются формально дуальными, т.е. их весовые эnumераторы связаны тождеством Мак-Вильямса.

Пусть  $C$  есть  $Z_{2^k}$ -линейный код,  $\varphi$ -образ линейного  $Z_{2^k}$ -кода  $C$  длины  $n$ . Пусть  $C^\perp$  — линейный  $Z_{2^k}$ -код, дуальный коду  $C$ . Пусть  $SW_{C^\perp}(X, Z, T)$  — многочлен, полученный из полного весового эnumератора  $W_{C^\perp}(X_0, X_1, \dots, X_{2^k-1})$  кода  $C^\perp$  отождествлением в  $Z$  (соответственно в  $T$ ) всех  $X_j$  с нечетным  $j$  (соответственно, с четным  $j$ , отличным от 0).

**Лемма 3-1 ([4]).** *Выполнено тождество*

$$W_C(X, Y) = \frac{1}{|C^\perp|} SW_{C^\perp} \left( X^{2^{k-1}} + Y^{2^{k-1}} + (2^k - 2)(XY)^{2^{k-2}}, \right. \\ \left. X^{2^{k-1}} - Y^{2^{k-1}}, \right. \\ \left. X^{2^{k-1}} + Y^{2^{k-1}} - 2(XY)^{2^{k-2}} \right).$$

Следующая лемма — известный факт о весовом распределении расширенных 1-совершенных кодов.

**Лемма 3-2.** *Пусть  $H$  — расширенный 1-совершенный  $(m, 2^m/2m, 4)$ -код. Тогда*

- a)  $\frac{1}{|H|} W_H(X + Y, X - Y) = X^m + Y^m + (2m - 2)(XY)^{m/2}$  если  $\bar{0} \in H$ ,
- b)  $\frac{1}{|H|} W_H(X + Y, X - Y) = X^m - Y^m$  если  $H$  нечетновесовой,
- c)  $\frac{1}{|H|} W_H(X + Y, X - Y) = X^m + Y^m - 2(XY)^{m/2}$  если  $H$  четновесовой и  $\bar{0} \notin H$ .

**Предложение 3-3.** *Пусть  $C$  есть  $Z_{2^k}$ -код и  $\tilde{C} = \Phi(C)$ . Тогда*

$$W_{\tilde{C}}(X, Y) = SW_C(W_{H_0}(X, Y), W_{H_1}(X, Y), W_{H_2}(X, Y)),$$

где  $\{H_0, \dots, H_{2^m-1}\}$  — разбиение  $Z_2^m$  на расширенные 1-совершенные коды из определения  $\Phi$ ,  $0 \in H_0$ ,  $H_1$  — нечетновесовой код,  $H_2$  — четновесовой код,  $\bar{0} \notin H_2$ .

*Доказательство.* Утверждение следует почти непосредственно из определения отображения  $\Phi$ . Действительно, каждое кодовое слово  $\bar{z} = (z_1, \dots, z_n) \in C$  добавляет  $SW_{z_1} \cdot \dots \cdot SW_{z_n}$  к  $SW_C(X, Z, T)$ , где

$$\begin{aligned} SW_0 &\triangleq X, \\ SW_{2j+1} &\triangleq Z, & j = 0, \dots, m-1, \\ SW_{2j} &\triangleq T, & j = 1, \dots, m-1. \end{aligned}$$

С другой стороны, как следует из определения отображения  $\Phi$ , каждое кодовое слово  $\bar{z} = (z_1, \dots, z_n) \in C$  добавляет  $W_{H_{z_1}}(X, Y) \cdot \dots \cdot W_{H_{z_n}}(X, Y)$  к  $W_{\tilde{C}}(X, Y)$ . Соотношения

$$\begin{aligned} W_{H_{2j+1}}(X, Y) &= W_{H_1}(X, Y), & j = 0, \dots, m-1, \\ W_{H_{2j}}(X, Y) &= W_{H_2}(X, Y), & j = 1, \dots, m-1, \end{aligned}$$

вытекающие из **Леммы 3-2**, завершают доказательство. □

Следующая теорема — основной результат этого раздела.



**Теорема 3-4.** Пусть  $C$  и  $C^\perp$  — дуальные линейные  $Z_{2^k}$ -коды,  $C = \varphi(C)$  и  $\tilde{C}_\perp = \Phi(C^\perp)$ . Тогда коды  $C$  и  $\tilde{C}_\perp$  являются формально дуальными, т. е.

$$W_C(X, Y) = \frac{1}{|\tilde{C}_\perp|} W_{\tilde{C}_\perp}(X + Y, X - Y).$$

*Доказательство.* Согласно **Леммам 3-1 и 3-2**

$$\begin{aligned} W_C(X, Y) &= \frac{1}{|C^\perp|} SW_{C^\perp} \left( \frac{1}{|H_0|} W_{H_0}(X+Y, X-Y), \frac{1}{|H_1|} W_{H_1}(X+Y, X-Y), \frac{1}{|H_2|} W_{H_2}(X+Y, X-Y) \right) \\ &= \frac{1}{|C^\perp|} \left( \frac{2^m}{2^m} \right)^n SW_{C^\perp} \left( W_{H_0}(X+Y, X-Y), W_{H_1}(X+Y, X-Y), W_{H_2}(X+Y, X-Y) \right). \end{aligned}$$

Остается заметить, что по **Лемме 2-5** мы имеем  $|C^\perp| \left( \frac{2^m}{2^m} \right)^n = |\tilde{C}_\perp|$  и по **Предложению 3-3** получаем

$$SW_{C^\perp} \left( W_{H_0}(X+Y, X-Y), W_{H_1}(X+Y, X-Y), W_{H_2}(X+Y, X-Y) \right) = W_{\tilde{C}_\perp}(X+Y, X-Y).$$

□

В **Разделах 4 и 5** мы построим два класса кодов,  $Z_{2^k}$ -дуальных друг другу: ко- $Z_{2^k}$ -линейные расширенные 1-совершенные коды и  $Z_{2^k}$ -линейные коды Адамара. В **последнем разделе** мы докажем полноту конструкции.

## 4 Ко- $Z_{2^k}$ -линейные расширенные 1-совершенные коды

Этот раздел посвящен расширенным 1-совершенным кодам. Сначала мы вводим понятие  $\bar{1}$ -совершенного кода, являющееся обобщением понятия расширенного 1-совершенного кода на некоторые не двоичные случаи. Как и для случая 1-совершенных кодов, вопрос существования  $\bar{1}$ -совершенных кодов в различных пространствах интересен сам по себе. Затем в **Подразделе 4.2** мы строим класс  $\bar{1}$ -совершенных кодов в  $(Z_{2^k}^n, d^\circ)$ . В **Подразделе 4.3** мы подводим итог: образы таких кодов при отображении  $\Phi$  являются ко- $Z_{2^k}$ -линейными расширенными 1-совершенными кодами. В **Подразделе 4.4** мы приводим примеры  $\bar{1}$ -совершенных кодов в  $Z_{2^m}$ , где  $m$  не есть степень двойки.

### 4.1 $\bar{1}$ -Совершенные коды

Пусть  $G = (V, E)$  — регулярный двудольный граф с долями  $V_{ev}$ ,  $V_{od}$ . Подмножество  $C \subseteq V_{ev}$  называется  $\bar{1}$ -совершенным кодом, если для каждого  $\bar{x} \in V_{od}$  найдется ровно один смежный  $\bar{x}$  элемент  $\bar{c} \in C$ . Нетрудно видеть, что  $\bar{1}$ -совершенный код является оптимальным кодом с расстоянием 4, т. е. его мощность максимальна по всем кодам с расстоянием 4 в том же пространстве. В частности, такой код является 3-диаметрально совершенным кодом в смысле [19].  $\bar{1}$ -Совершенные коды в двоичном пространстве Хемминга известны как расширенные 1-совершенные коды. Следующий критерий можно взять в качестве альтернативного определения  $\bar{1}$ -совершенного кода.

**Предложение 4-1.** Пусть  $G = (V, E)$  — регулярный двудольный граф степени  $r > 0$  и  $d^G$  — естественная графская метрика на  $V$ . Множество вершин  $C \subset V$  является  $\bar{1}$ -совершенным кодом тогда и только тогда, когда  $|C| = |V|/2r$  и  $d^G(\bar{c}_1, \bar{c}_2) \geq 4$  для любых различных  $\bar{c}_1, \bar{c}_2 \in C$ .

*Доказательство. Только если:* Пусть  $C \subset V$  есть  $\bar{1}$ -совершенный код. По определению он является подмножеством некоторой доли  $V_{ev}$  графа  $(V, E)$  и расстояние между любыми двумя элементами кода  $C$  четно.

С другой стороны, если  $d^G(\bar{c}_1, \bar{c}_2) = 2$  для некоторых  $\bar{c}_1, \bar{c}_2 \in C$ , то найдется такой элемент  $\bar{x} \in V$ , что  $d^G(\bar{x}, \bar{c}_1) = 1$  и  $d^G(\bar{x}, \bar{c}_2) = 1$ . Существование такого элемента противоречит определению  $\bar{1}$ -совершенного кода. Следовательно,  $d^G(\bar{c}_1, \bar{c}_2) \geq 4$  для любых различных  $\bar{c}_1, \bar{c}_2 \in C$ .

Каждый элемент множества  $V_{od} \triangleq V \setminus V_{ev}$  является смежным ровно с одним элементом кода  $C$ . С другой стороны, каждый элемент  $C$  смежный ровно с  $r$  элементами  $V_{od}$ . Отсюда  $|C| = |V_{od}|/r = |V|/2r$ .

*Если:* Предположим, что  $C$  имеет мощность  $|V|/2r$  и кодовое расстояние не меньше 4. Обозначим

$$C_1 \triangleq \{\bar{x} \mid d^G(\bar{x}, C) = 1\}.$$

Каждый элемент из  $C_1$  имеет ровно одного соседа из  $C$  (в противном случае кодовое расстояние  $C$  не превышает 2). Следовательно,  $|C_1| = r|C| = |V|/2$ .

(\*) Мы утверждаем, что  $C_1$  не содержит двух смежных элементов. Допустим противное. Тогда граф  $G$  содержит цепь  $(\bar{c}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{c}')$ , где  $\bar{c}, \bar{c}' \in C$ ,  $\bar{x}, \bar{y} \in C_1$ . Случай  $\bar{c} = \bar{c}'$  противоречит двудольности графа  $G$ . Случай  $\bar{c} \neq \bar{c}'$  противоречит кодовому расстоянию кода  $C$ . Утверждение (\*) доказано.

Поскольку  $G$  — регулярный граф, другая половина вершин  $V \setminus C_1$  также не содержит смежных элементов. Следовательно,  $C$  является  $\bar{1}$ -совершенным кодом по определению, где  $V_{od} = C_1$ .  $\square$

## 4.2 Класс $\bar{1}$ -совершенных кодов в $Z_{2^k}^n$

Пусть  $n = 2^r$  и  $I = (i_1, \dots, i_k)$  — набор неотрицательных целых чисел, удовлетворяющий равенству  $1i_1 + 2i_2 + \dots + ki_k = r$ . Пусть  $\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n \in Z_{2^k}^{1+i_1+\dots+i_k}$  — все элементы множества  $\{1\} \times (2^{k-1}Z_{2^k})^{i_1} \times (2^{k-2}Z_{2^k})^{i_2} \times \dots \times (2^0Z_{2^k})^{i_k}$ , упорядоченные лексикографически. И пусть  $B_I$  — матрица со столбцами  $\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n$ .

**Пример 4-2.** При  $k = 3$ ,  $i_1 = 2$ ,  $i_2 = 1$ ,  $i_3 = 0$  имеем  $r = 4$ ,  $n = 2^r = 16$  и

$$B_I = \begin{pmatrix} 1111111111111111 \\ 0000000044444444 \\ 0000444400004444 \\ 0246024602460246 \end{pmatrix}.$$

При  $k = 3$ ,  $i_1 = 0$ ,  $i_2 = i_3 = 1$  имеем  $r = 5$ ,  $n = 2^r = 32$  и

$$B_I = \begin{pmatrix} 11111111111111111111111111111111 \\ 0000000022222222444444444666666666 \\ 01234567012345670123456701234567 \end{pmatrix}.$$



$$B' \triangleq \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 12 & 12 & 12 \\ 0 & 6 & 12 & 18 & 0 & 6 & 12 & 18 \end{pmatrix},$$

$$B'' \triangleq \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 8 & 12 & 16 & 20 \end{pmatrix}$$

являются  $\bar{1}$ -совершенными кодами над  $Z_{24}$  с расстоянием  $d^\circ$ .

## 5 $Z_{2^k}$ -Линейные коды Адамара

**Лемма 5-1.** *Линейный код  $\mathcal{H}$  в  $Z_{2^k}^n$  является  $(n, n2^k, n2^{k-2})^*$ -кодом тогда и только тогда, когда  $\mathcal{H}^\perp$  —  $\bar{1}$ -совершенный код в  $(Z_{2^k}^n, d^\circ)$ .*

*Доказательство.* Предположим, что линейный код  $\mathcal{H}$  имеет параметры  $(n, n2^k, n2^{k-2})^*$ . Тогда  $\varphi(\mathcal{H})$  имеет параметры кода Адамара, см. [Следствие 2-2](#). Согласно [Теореме 3-4](#) код  $\Phi(\mathcal{H}^\perp)$  является формально дуальным коду Адамара  $\varphi(\mathcal{H})$ , т. е.  $\Phi(\mathcal{H}^\perp)$  — расширенный 1-совершенный код. Тогда мощность и минимальное  $d^\circ$ -расстояние 4 кода  $\mathcal{H}^\perp$  следуют из [Леммы 2-5](#).

Обратное утверждение доказывается обратным рассуждением.  $\square$

Следующая теорема следует сразу из [Лемм 4-3 и 5-1](#).

**Теорема 5-2.** *Код  $\mathcal{D}_I \triangleq \mathcal{H}_I^\perp$  — линейный  $(n, n2^k, n2^{k-2})^*$ -код с порождающей матрицей  $B_I$ . Соответствующий  $Z_{2^k}$ -линейный код  $D_I \triangleq \varphi(\mathcal{D}_I)$  является двоичным  $(n2^{k-1}, n2^k, n2^{k-2})$ -кодом, т. е. кодом Адамара.*

**Замечание 5-3.** Код  $\mathcal{D}_{(r,0,\dots,0)}$  известен как код Риды-Маллера первого порядка над  $Z_{2^k}$  [\[16\]](#).

**Замечание 5-4.** Если существует код Адамара  $A$  длины  $m$  (см. [Подраздел 2.1](#)), то  $Z_{2m}$ -линейный код Адамара длины  $nm = 2^r m$  может быть построен даже если  $m$  не является степенью двойки. Например, линейный  $Z_{24}$ -код с порождающей матрицей  $B'$  из [Примера 4-5](#) имеет параметры  $(16, 192, 48)^*$  и соответствующий двоичный  $Z_{24}$ -линейный код имеет параметры  $(96, 192, 48)$ , т. е. параметры кода Адамара длины 96.

Однако код с порождающей матрицей  $B''$  ([Пример 4-5](#)) имеет параметры  $(6, 144, 30)^*$ , соответствующие двоичному  $(72, 144, 30)$ -коду. Кодовое расстояние этого кода меньше, чем кодовое расстояние кода Адамара той же длины и той же мощности.

## 6 Несуществование неизвестных ко- $Z_{2^k}$ -линейных расширенных совершенных кодов и $Z_{2^k}$ -линейных кодов Адамара

Пусть  $n$  — степень двойки. В этом разделе мы покажем ([Теорема 6-2](#)), что каждый линейный  $(n, 2^{kn}/n2^k, 4)^\circ$ -код в  $Z_{2^k}^n$  эквивалентен некоторому коду из класса, построенного в [Разделе 4](#). Аналогично, каждый линейный  $(n, n2^k, n2^{k-2})^*$ -код в  $Z_{2^k}^n$  эквивалентен некоторому коду из класса, построенного в [Разделе 5](#) ([Теорема 6-3](#)). Ключевым моментом доказательства является [Лемма 6-4](#). Частный  $Z_4$ -случай этой леммы

был доказан в [10] и в [13], приведенное ниже доказательство использует другой ход рассуждений.

Мы говорим, что два линейных кода  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \subseteq Z_{2^k}^n$  эквивалентны, если  $\mathcal{C}_2 = \bar{z} \circ \pi \mathcal{C}_1$ , где  $\pi$  — перестановка координат,  $\bar{z} \in (Z_{2^k}^*)^n \triangleq \{1, 3, \dots, 2^k - 1\}^n$ , и  $\circ$  — покоординатное произведение, т. е.  $(z_1, \dots, z_n) \circ (x_1, \dots, x_n) \triangleq (z_1 x_1, \dots, z_n x_n)$ . Заметим, что как  $\pi$ , так и  $\bar{z} \circ$  — групповые автоморфизмы аддитивной группы  $Z_{2^k}^n$  и изометрии метрических пространств  $(Z_{2^k}^n, d^*)$  и  $(Z_{2^k}^n, d^\circ)$ . Следующее предложение показывает, что нет других линейных изометрий пространства  $(Z_{2^k}^n, d^*)$  или  $(Z_{2^k}^n, d^\circ)$ , следовательно наше определение эквивалентности естественно.

**Предложение 6-1.** *Предположим, что  $\Gamma$  является линейным преобразованием  $Z_{2^k}^n$  и изометрией  $(Z_{2^k}^n, d)$ , где  $d = d^*$  или  $d = d^\circ$ . Тогда  $\Gamma(\bar{x}) \equiv \bar{z} \circ \pi(\bar{x})$ , где  $\pi$  — перестановка координат и  $\bar{z} \in (Z_{2^k}^*)^n$ .*

*Доказательство.* Обозначим через  $\bar{e}_i$  слово с единицей в позиции с номером  $i$  и нулями в остальных. Достаточно проверить, что для каждого  $i$  мы имеем  $\Gamma(\bar{e}_i) \equiv z_j \bar{e}_j$  с некоторыми  $j = \pi(i)$  и  $z_j \in Z_{2^k}^*$ . Действительно, из изометрических свойств  $\Gamma$  мы выводим, что  $\Gamma(\bar{e}_i)$  имеет только одну ненулевую координату. С другой стороны, значение этой координаты принадлежит  $Z_{2^k}^*$ , поскольку  $\Gamma$  является биекцией.  $\square$

Следующие две теоремы являются основным результатом этого раздела. Напомним, что коды  $\mathcal{H}_I$  и  $\mathcal{D}_I$  определяются в [Разделах 4 и 5](#).

**Теорема 6-2.** *Пусть  $\mathcal{H} \subset Z_{2^k}^n$  — некоторый линейный  $\bar{1}$ -совершенный код. Тогда  $\mathcal{H}$  эквивалентен  $\mathcal{H}_I$  для некоторого набора  $I = (i_1, \dots, i_k)$  неотрицательных целых чисел, удовлетворяющего равенству  $1i_1 + 2i_2 + \dots + ki_k = \log_2 n$ .*

**Теорема 6-3.** *Пусть  $\mathcal{D} \subset Z_{2^k}^n$  — линейный  $(n, n2^k, n2^{k-2})^*$ -код. Тогда  $\mathcal{D}$  эквивалентен  $\mathcal{D}_I$  для некоторого набора  $I = (i_1, \dots, i_k)$  неотрицательных целых чисел, удовлетворяющего равенству  $1i_1 + 2i_2 + \dots + ki_k = \log_2 n$ .*

Согласно [Леммы 5-1](#) достаточно доказать только одну из [Теорем 6-2, 6-3](#). Нам понадобится следующий вспомогательный результат.

**Лемма 6-4.** *Если  $\mathcal{D}$  — линейный  $(n, n2^k, n2^{k-2})^*$ -код в  $Z_{2^k}^n$ , то  $\mathcal{D}$  содержит элемент из  $(Z_{2^k}^*)^n$ .*

*Доказательство.* Докажем лемму по индукции. Если  $n = 1$ , то  $\mathcal{D} = Z_{2^k}$ . Предположим, что  $n > 1$ .

(\*) Мы утверждаем, что  $\mathcal{D}$  содержит элемент из  $\{0, 2^{k-1}\}^n$  веса  $n2^{k-2}$ . Пусть  $\bar{x}'$  и  $\bar{x}''$  — два линейно независимых элемента в  $\mathcal{D}$  порядков  $2m'$  и  $2m''$  соответственно. Это означает, что  $m'\bar{x}'$  и  $m''\bar{x}''$  — различные ненулевые элементы из  $\mathcal{D} \cap \{0, 2^{k-1}\}^n$ . Поскольку  $\varphi$  является изометричным вложением (см. [Предложение 2-1](#)) и  $\varphi(\mathcal{D})$  есть  $(n2^{k-1}, n2^k, n2^{k-2})$ -код Адамара, единственные возможные значения  $wt^*$ -весов элементов  $\mathcal{D}$  есть  $0, n2^{k-2}$  и  $n2^{k-1}$ . Таким образом, как минимум один из  $m'\bar{x}'$  и  $m''\bar{x}''$  имеет вес  $n2^{k-2}$ . Утверждение (\*) доказано.

Без потери общности будем считать, что  $\bar{a} \triangleq (2^{k-1}, \dots, 2^{k-1}, 0, \dots, 0) \in \mathcal{D}$ .

Рассмотрим два кода, полученных из  $\mathcal{D}$  выкалыванием  $n/2$  координат:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_1 &\triangleq \{ \bar{z}' \in Z_{2^k}^{n/2} \mid \exists \bar{z}'' \in Z_{2^k}^{n/2} : (\bar{z}', \bar{z}'') \in \mathcal{D} \}, \\ \mathcal{D}_2 &\triangleq \{ \bar{z}'' \in Z_{2^k}^{n/2} \mid \exists \bar{z}' \in Z_{2^k}^{n/2} : (\bar{z}', \bar{z}'') \in \mathcal{D} \}. \end{aligned}$$

(\*\*) Мы утверждаем, что  $\mathcal{D}_1$  и  $\mathcal{D}_2$  — линейные  $(n/2, n2^{k-1}, n2^{k-3})^*$ -коды. Линей-

ность очевидна. Кодовое расстояние следует из факта, что расстояние между  $\bar{a}$  и любым элементом  $\bar{z} \in \mathcal{D}$  равно 0,  $n2^{k-2}$  или  $n2^{k-1}$ . Мощность кода  $\mathcal{D}_1$  удовлетворяет неравенству  $|\mathcal{D}_1| \geq |\mathcal{D}|/2$ , поскольку кодовое расстояние  $\mathcal{D}$  допускает только одно ненулевое слово с нулями в первых  $n/2$  координатах. С другой стороны, есть такое кодовое слово:  $(0, \dots, 0, 2^{k-1}, \dots, 2^{k-1}) = (2^{k-1}, \dots, 2^{k-1}) + \bar{a} \in \mathcal{D}$ . Поэтому  $|\mathcal{D}_1| = |\mathcal{D}|/2 = n2^{k-1}$ . Аналогично  $|\mathcal{D}_2| = n2^{k-1}$ . Утверждение (\*\*\*) доказано.

По предположению индукции  $\mathcal{D}_1$  содержит элемент  $\bar{u}'$  из  $(Z_{2^k}^*)^{n/2}$ . Это означает, что существует  $\bar{u}''$  из  $Z_{2^k}^{n/2}$  такое, что  $(\bar{u}', \bar{u}'') \in \mathcal{D}$ . Поскольку  $wt^*(2^{k-1}(\bar{u}', \bar{u}'')) \in \{n2^{k-2}, n2^{k-1}\}$  и  $2^{k-1}\bar{u}' = (2^{k-1}, \dots, 2^{k-1})$ , имеем  $wt^*(2^{k-1}\bar{u}'') = 0$  или  $wt^*(2^{k-1}\bar{u}'') = n2^{k-2}$ . Таким образом,

$$2^{k-1}\bar{u}'' = (0, \dots, 0), \quad (1)$$

$$\text{или } 2^{k-1}\bar{u}'' = (2^{k-1}, \dots, 2^{k-1}). \quad (2)$$

Аналогично, рассматривая код  $\mathcal{D}_2$ , мы можем найти кодовое слово  $(\bar{v}', \bar{v}'') \in \mathcal{D}$  такое, что  $2^{k-1}\bar{v}'' = (2^{k-1}, \dots, 2^{k-1})$  и  $v'$  удовлетворяет

$$2^{k-1}\bar{v}' = (0, \dots, 0), \quad (3)$$

$$\text{или } 2^{k-1}\bar{v}' = (2^{k-1}, \dots, 2^{k-1}). \quad (4)$$

Если выполнено (2), то  $(u', u'') \in (Z_{2^k}^*)^n \cap \mathcal{D}$ . Если выполнено (4), то  $(v', v'') \in (Z_{2^k}^*)^n \cap \mathcal{D}$ . Если выполнено (1) и (3), то  $(u', u'') + (v', v'') \in (Z_{2^k}^*)^n \cap \mathcal{D}$ . Лемма 6-4 доказана.  $\square$

*Доказательство Теоремы 6-3.* По Лемме 6-4 код  $\mathcal{D}$  содержит элемент  $\bar{c} = (c_1, \dots, c_n)$  из  $(Z_{2^k}^*)^n$ . Тогда код  $\mathcal{D}' \triangleq (c_1^{-1}, \dots, c_n^{-1}) \circ \mathcal{D}$  эквивалентен коду  $\mathcal{D}$  и содержит  $\bar{1} = (1, \dots, 1)$ . Пусть  $\{\bar{1}, q_1, \dots, q_s\}$  — некоторый базис кода  $\mathcal{D}'$  и  $i_j$  — число элементов порядка  $2^j$ ,  $j = 1, \dots, k$ . Пусть  $\bar{1}, q_1, \dots, q_s$  — строки матриц  $Q$  размера  $(1 + i_1 + \dots + i_k) \times n$ , порождающей матрицы кода  $\mathcal{D}'$ . Тогда столбцы  $Q$  являются элементами  $\{1\} \times (2^{k-1}Z_{2^k})^{i_1} \times (2^{k-2}Z_{2^k})^{i_2} \times \dots \times (2^0Z_{2^k})^{i_k}$ . Поскольку по Лемме 5-1 кодовое  $d^\circ$ -расстояние кода  $\mathcal{D}'^\perp$  больше 2, все столбцы попарно различны. Следовательно  $Q$  совпадает с  $B_I$ ,  $I = (i_1, \dots, i_k)$ , с точностью до перестановки столбцов.  $\square$

Таким образом, мы заключаем, что при условии фиксированных отображений  $\varphi$  и  $\Phi$  все с точностью до эквивалентности ко- $Z_{2^k}$ -линейные расширенные 1-совершенные коды и  $Z_{2^k}$ -линейные коды Адамара описаны в Разделах 4 и 5.

## Список литературы

- [1] А. А. Нечаев, “Функции «след» в кольце Галуа и помехоустойчивые коды” // *Тезисы сообщений V Всесоюзн. симп. по теории колец, алгебр и модулей* – Новосибирск, Россия, 1982, с.97.
- [2] А. А. Нечаев, “Код Кердока в циклической форме” // *Дискрет. матем.* 1(4) 1989, 123–139.  
А. А. Nechaev, “Kerdock code in a cyclic form” // *Discrete Math. Appl.* 1(4) 1991, 365–384.
- [3] A. R. J. Hammons, P. V. Kumar, A. R. Calderbank, N. J. A. Sloane, P. Solé, “The  $Z_4$ -linearity of Kerdock, Preparata, Goethals, and related codes” // *IEEE Trans. Inform. Theory* 40(2) 1994, 301–319. DOI: [10.1109/18.312154](https://doi.org/10.1109/18.312154)

- [4] C. Carlet, “ $Z_{2^k}$ -Linear codes” // *IEEE Trans. Inform. Theory*, 44(4) 1998, 1543–1547. DOI: [10.1109/18.681328](https://doi.org/10.1109/18.681328)
- [5] А. А. Нечаев, Т. Хонольд, “Полновесные модули и представления кодов” // *Пробл. передачи информ.* 35(3) 1999, 18–39.  
Т. Honold, A. A. Nechaev, “Fully weighted modules and representations of codes” // *Probl. Inform. Transm.* 35(3) 1999, 205–223.
- [6] И. Константинуеску, В. Хайзе, “Метрика для кодов над кольцами классов вычетов целых чисел” // *Пробл. передачи информ.* 33(3) 1997, 22–28.  
I. Constantinescu, W. Heise, “A metric for codes over residue class rings of integers” // *Probl. Inform. Transm.* 33(3) 1997, 208–213.
- [7] В. А. Зиновьев, “Обобщенные каскадные коды” // *Пробл. передачи информ.* 12(1) 1976, 5–15.  
V. A. Zinoviev, “Generalized concatenated codes” // *Probl. Inform. Transm.* 12(1) 1976, 2–9.
- [8] J. Rifa, J. Pujol, “Translation-invariant propelinear codes” // *IEEE Trans. Inform. Theory* 43(2) 1997, 590–598. DOI: [10.1109/18.556115](https://doi.org/10.1109/18.556115)
- [9] J. Borges, J. Rifa, “A characterization of 1-perfect additive codes” // *IEEE Trans. Inform. Theory* 45(8) 1999, 1688–1697. DOI: [10.1109/18.771247](https://doi.org/10.1109/18.771247)
- [10] Д. С. Кротов, “ $Z_4$ -Линейные совершенные коды” // *Дискр. анализ и исслед. операций, сер.1* 7(4) 2000, 78–90.  
D. S. Krotov, “ $Z_4$ -Linear perfect codes” // [arXiv:0710.0198](https://arxiv.org/abs/0710.0198)
- [11] D. S. Krotov, “ $Z_4$ -Linear Hadamard and extended perfect codes” // *Electron. Notes Discrete Math.* 6 2001, 107–112. DOI: [10.1016/S1571-0653\(04\)00161-1](https://doi.org/10.1016/S1571-0653(04)00161-1) [arXiv:0710.0199](https://arxiv.org/abs/0710.0199)
- [12] K. T. Phelps, J. Rifa, “On binary 1-perfect additive codes: Some structural properties” // *IEEE Trans. Inform. Theory* 48(9) 2002, 2587–2592. DOI: [10.1109/TIT.2002.801474](https://doi.org/10.1109/TIT.2002.801474)
- [13] J. Borges, K. T. Phelps, J. Rifa, “The rank and kernel of extended 1-perfect  $Z_4$ -linear and additive non- $Z_4$ -linear codes” // *IEEE Trans. Inform. Theory* 49(8) 2003, 2028–2034. DOI: [10.1109/TIT.2003.814490](https://doi.org/10.1109/TIT.2003.814490)
- [14] K. T. Phelps, J. Rifa, M. Villanueva, “Rank and kernel of additive ( $Z_4$ -linear and non- $Z_4$ -linear) Hadamard codes” // *Proc. Ninth Int. Workshop on Algebraic and Combinatorial Coding Theory ACCT'2004*, Kranevo, Bulgaria, June 2004, 327–332.
- [15] K. T. Phelps, J. Rifa, M. Villanueva, “On the additive ( $Z_4$ -linear and non- $Z_4$ -linear) Hadamard codes: Rank and kernel” // *IEEE Trans. Inform. Theory* 52(1) 2006, 316–319. DOI: [10.1109/TIT.2005.860452](https://doi.org/10.1109/TIT.2005.860452)
- [16] M. K. Gupta, M. C. Bhandari, A. K. Lal, “On linear codes over  $Z_{2^s}$ ” // *Des. Codes Cryptography* 36(3) 2005, 227–244. DOI: [10.1007/s10623-004-1717-1](https://doi.org/10.1007/s10623-004-1717-1)

- [17] Ф. И. Соловьева, “О построении транзитивных кодов” // *Пробл. передачи информ.* 41(3) 2005, 23–31.  
F. I. Solov'eva, “On the construction of transitive codes” // *Probl. Inform. Transm.* 41(3) 2005, 204–211. DOI: [10.1007/s11122-005-0025-3](https://doi.org/10.1007/s11122-005-0025-3)
- [18] Ф. Дж. Мак-Вильямс, Н. Дж. А. Слоэн, *Теория кодов, исправляющих ошибки*. М.: Связь, 1979.  
F. J. MacWilliams, N. J. A. Sloane, *The Theory of Error-Correcting Codes*. Amsterdam, Netherlands: North Holland, 1977.
- [19] R. Ahlswede, Н. К. Аудинян, L. К. Khachatrian, “On perfect codes and related concepts” // *Des. Codes Cryptography* 22(3) 2001, 221–237. DOI: [10.1023/A:1008394205999](https://doi.org/10.1023/A:1008394205999)