On the Number of 1-Perfect Binary Codes: a Lower Bound

Denis S. Krotov and Sergey V. Avgustinovich

***Abstract*— We present a construction of 1-perfect binary codes, which gives a new lower bound on the number of such codes. We conjecture that this lower bound is asymptotically tight.**

***Index terms*—automorphism, lower bound, perfect binary codes**

I. Introduction

The paper is devoted to the problem of enumeration of 1-perfect binary codes. Such codes, as any optimal codes, are extremal objects of the theory of error-correcting codes. In addition, perfect codes are a special type of combinatorial configurations. The construction of 1-perfect binary codes presented in the current paper gives the most powerful known class of such codes and leads to a lower bound on their number.

The first known construction [13] of nonlinear 1-perfect binary codes gives the lower bound

$$B(n-1) \quad \geq \quad 2^{2^{\frac{n}{2}-\log\frac{n}{2}-1}} \cdot 2^{2^{\frac{n}{4}-\log\frac{n}{4}-1}} \cdot 2^{2^{\frac{n}{8}-\log\frac{n}{8}-1}} \cdot \ldots$$

on the number $B(n-1)$ of 1-perfect codes of length $n-1=2^m-1$ (here and in what follows $\log$ means $\log_2$). This bound was improved in [3] and [9], where some useful ideas exploited in this paper were proposed. The best known lower bound [6] is

$$B(n-1) \quad \geq \quad 2^{2^{\frac{n}{2}-\log\frac{n}{2}-1}} \cdot 3^{2^{\frac{n}{4}-1}} \cdot 2^{2^{\frac{n}{4}-\log\frac{n}{4}-1}}. \qquad (1)$$

The result of [6] was formulated in the terms of a partial case [10] of the generalized concatenation construction (see, e.g., [14]), which allows to construct 1-perfect binary codes from distance 2 q-ary MDS codes (only the case $q=4$ is useful for the lower bound), or n-ary quasigroups (of order 4). The lower bound on the number of n-ary quasigroups of order 4 given in [6] is asymptotically tight [7], [12]; therefore, such a way to evaluate the number of 1-perfect binary codes has been exhausted.

The best known upper bound [1] on the number of 1-perfect binary codes is $2^{2^{n-(3/2)\log n+\log\log(en)}}$.

The local-automorphism method presented in this work is a further development of the methods [13], [3], [9], [6]. Since there is one-to-one correspondence between 1-perfect binary codes and extended 1-perfect binary codes, the results are formulated in terms of extended 1-perfect binary codes.

This is author's version of the correspondence in the IEEE Transactions on Information Theory 54(4) 2008, 1760-1765, Digital Object Identifier 10.1109/TIT.2008.917692,

The material in this correspondence was presented in part at the 10th International Workshop on Algebraic and Combinatorial Coding Theory ACCT-10, Zvenigorod, Russia, September 2006 and, in a brief form, at the Russian conference "Discrete Analysis and Operations Research" DAOR'2004, Novosibirsk, Russia, June-July 2004, p95.

The authors are with the Sobolev Institute of Mathematics, pr-t Ak. Koptyuga 4, Novosibirsk, 630090, Russia (e-mail: krotov@math.nsc.ru, avgust@math.nsc.ru)

II. Preliminaries

Let F^n ($F^n_{\rm Ev}$, $F^n_{\rm Od}$) be the set of the binary n-words (with even or odd number of ones, respectively) with the Hamming distance d and mod 2 coordinate-wise addition. Given $\bar x\in F^n$, put $wt(\bar x)\triangleq d(\bar x,\bar 0)$. The *neighborhood* of $S\subseteq F^n$ is the set $\Omega(S)\triangleq\bigcup_{\bar x\in S}\Omega(\bar x)$ where $\Omega(\bar x)\triangleq\{\bar y\in F^n\,|\,d(\bar y,\bar x)=1\}$.

A set $C\subseteq F^n$ is called a *distance d code* (*of length n*) if the Hamming distance between any two different words in C is not less than d. An *extended 1-perfect code* is a set $C\subseteq F^n_{\rm Ev}$ such that the neighborhoods of the words of C are pairwise disjoint and $\Omega(C)=F^n_{\rm Od}$. It follows that C is a distance 4 code of cardinality $|C|=|F^n_{\rm Od}|/n=2^{n-\log n-1}$ and n is a power of 2. On the other hand, if the code $C\subset F^n_{\rm Ev}$ has distance 4 and $|C|=2^{n-\log n-1}$, then, obviously, C is an extended 1-perfect code. In what follows we assume $n=2^m\geq 16$.

The following formulas define some useful sets $V^t,A^t\subset F^n_{\rm Ev}$ and give a representation of the extended Hamming code:

$$V^t \quad\triangleq\quad \{(\bar v,\bar v,0,\ldots,0)\in F^n\,|\,\bar v\in F^{2^{m-t}}_{\rm Ev}\}, \qquad (2)$$
$$t=1,\ldots,m-1$$
$$A^1 \quad\triangleq\quad V^1$$
$$A^t \quad\triangleq\quad V^t+A^{t-1}=\bigcup_{\bar r\in V^t}(\bar r+A^{t-1}), \qquad (3)$$
$$t=2,\ldots,m-1$$
$$H \quad\triangleq\quad A^{m-1}. \qquad (4)$$

The following is straightforward:

Proposition 1: The set H defined by (4) is a linear extended 1-perfect code, i.e., the extended Hamming code (see e.g. [8, §1.7]), which is the only linear extended 1-perfect code, up to coordinate permutation.

We say that a set $G\subset F^n_{\rm Ev}$ is a *component of order* $t\in\{1,\ldots,m-1\}$ if $|G|=|A^t|$ and $\Omega(G)=\Omega(A^t)$. Let $t\in\{1,\ldots,m-1\}$ and $\bar\mu\in F^{2^{m-t}}\times 0^{n-2^{m-t}}$; we say that a set $M\subset F^n_{\rm Ev}$ is a *$\bar\mu$-component* (of order t) if $M=G+\bar\mu$ for some component G of order t.

Let $\mathrm{Aut}(F^n)$ denote the group of isometries F^n (it coincides with the automorphism group of the distance-one graph of F^n). It is known that each isometry $g\in\mathrm{Aut}(F^n)$ has a unique representation $g(\cdot)=\bar v+\pi(\cdot)$ where $\bar v$ is a *shift vector* from F^n and π is a coordinate permutation. If $\pi=Id$, i.e., $g(\cdot)=\bar v+\cdot$, then the isometry g is called a *translation*. If $S\subseteq F^n$, then $\mathrm{Aut}(S)$ is the group of isometries g of F^n such that $g(S)=S$. For a collection $\mathbf{S}=\{S_1,\ldots,S_l\}$ of subsets of F^n, by $\mathrm{Aut}(\mathbf{S})$ denote the group of isometries g of F^n such that for each $S\in\mathbf{S}$ the set $g(S)$ is also in $\mathbf{S}$. In what follows we use calligraphic letters to denote subgroups of $\mathrm{Aut}(F^n)$. Put

$$\mathcal{A}^t\triangleq\mathrm{Aut}(\Omega(A^t))$$

where A^t is specified by (3).

Proposition 2: (a) Let $t\in\{2,\ldots,m-1\}$ and let for each $\bar\mu\in V^t$ the set $B_{\bar\mu}$ be a $\bar\mu$-component of order $t-1$. Then the set $B=\bigcup_{\bar\mu\in V^t}B_{\bar\mu}$ is a component of order t.

(b) If B is a component of order t and $g^t \in \mathcal{A}^t$, then $g^t(B)$ is a component of order t too.

(c) A component of order $m-1$ is an extended 1-perfect code.

Proof: (a) follows from (3), the definition of a component of order t, and the equality $\Omega(\bar{\mu} + A^{t-1}) = \Omega(B_{\bar{\mu}})$, which holds by the definition of $\bar{\mu}$-component of order $t-1$.

(b) and (c) are straightforward from the definitions. ■

III. The LA Construction of Extended 1-Perfect Codes

Proposition 2 is all we need to see that the following construction leads to an extended 1-perfect code. The idea of the construction is to take the Hamming code and apply isometries of F^n to parts of the code in such a way that the neighborhood of the part does not change. We call such isometries *local automorphisms*; a local automorphism acts on a part of the code and does not change the neighborhood of that part. At the first stage we take components of order 1 as such parts; at the second stage, components of order 2; and so on. At the last stage, we "turn" the whole code.

Construction 1 (LA – local automorphisms): Assume for any integer $t \in \{2, \dots, m\}$ and for any words $\bar{r}_i \in V^i$, $i = t, \dots, m-1$ we have a local automorphism $g_{\bar{r}_t,\dots,\bar{r}_{m-1}} \in \mathcal{A}^{t-1}$; in particular, $g \in \mathcal{A}^{m-1}$. Then (as follows by induction on t from Proposition 2) the set C represented by the following formulas is an extended 1-perfect code.

$$\begin{aligned} A^1_{\bar{r}_2,\dots,\bar{r}_{m-1}} &\triangleq V^1, \qquad \bar{r}_i \in V^i \\ A^t_{\bar{r}_{t+1},\dots,\bar{r}_{m-1}} &\triangleq \bigcup_{\bar{r}_t \in V^t} \left(\bar{r}_t + g_{\bar{r}_t,\dots,\bar{r}_{m-1}}(A^{t-1}_{\bar{r}_t,\dots,\bar{r}_{m-1}})\right), \\ & \qquad t = 2, \dots, m-1 \\ C &\triangleq g(A^{m-1}). \end{aligned} \tag{5}$$

In Construction 1 each code can be obtained in more than one way. To evaluate the number of the codes that can be constructed in this way we need stronger restrictions on local automorphisms.

Let

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^1 &\triangleq \mathrm{Aut}(A^1) \\ \mathcal{B}^t &\triangleq \mathrm{Aut}\Big(\{\bar{r} + \Omega(A^{t-1})\}_{\bar{r} \in V^t}\Big), \qquad t = 2, \dots, m-1. \end{aligned}$$

For each $t = 1, \dots, m-1$ we fix a set $\mathcal{D}^t$ of representatives of cosets from $\mathcal{A}^t/\mathcal{B}^t$. Moreover, we choose the representatives in such a way that the following holds: for two cosets $D_1, D_2 \in \mathcal{A}^t/\mathcal{B}^t$ and their representatives $d_1, d_2 \in \mathcal{D}^t$, $d_1 \in D_1$, $d_2 \in D_2$, the equality $D_1 = \tau D_2$ with some translation τ implies $d_1 = \tau d_2$ (this condition is essential for the definition of degenerate collection and Proposition 8 below).

It can be shown by induction that

Proposition 3: The restrictions $g_{\bar{r}_t,\dots,\bar{r}_{m-1}} \in \mathcal{D}^{t-1}$ do not reduce the set of codes that can be represented by (5).

Proof: Assume that

$$G^t \triangleq \bigcup_{\bar{r} \in V^t} \left(\bar{r} + g_{\bar{r}}(G^{t-1}_{\bar{r}})\right)$$

where $G^{t-1}_{\bar{r}}$ is a component of order $t-1$ and $g_{\bar{r}} \in \mathcal{A}^{t-1}$ for all $\bar{r} \in V^t$. Let $g \in \mathcal{A}^t$ and $g = dh$ where $d \in \mathcal{D}^t$ and $h \in \mathcal{B}^t$.

We claim that

$$g(G^t) = d(G'^t) \quad \text{where} \quad G'^t \triangleq \bigcup_{\bar{q} \in V^t} \left(\bar{q} + g'_{\bar{q}}(G^{t-1}_{\rho\bar{q}})\right) \tag{6}$$

for some $g'_{\bar{q}} \in \mathcal{A}^{t-1}$ and permutation $\rho : V^t \to V^t$. Indeed, by the definition of $\mathcal{B}^t$, for all $\bar{r} \in V^t$ we have

$$h(\bar{r} + \Omega(A^{t-1})) = \rho^{-1}\bar{r} + \Omega(A^{t-1})$$

where ρ is some permutation on V^t. So, we see that $h_{\bar{r}}(\cdot) \triangleq \rho^{-1}\bar{r} + h(\bar{r} + \cdot)$ belongs to $\mathcal{A}^{t-1}$. Then, replacing $\bar{r}$ by $\bar{q} \triangleq \rho^{-1}\bar{r}$, we see that (6) holds with $g'_{\bar{q}} \triangleq h_{\rho\bar{q}} g_{\rho\bar{q}}$.

So, using (6), we can step-by-step replace the operators $g_{\dots} \in \mathcal{A}^t$ by $d_{\dots} \in \mathcal{D}^t$, starting from $t = m-1$ and finishing with $t = 1$. ■

Therefore the following construction gives the same set of codes as Construction 1.

Construction 2 (LA, upper bound): Assume that for any integer $t \in \{2, \dots, m\}$ and for any words $\bar{r}_i \in V^i$, $i = t, \dots, m-1$, we have $g_{\bar{r}_t,\dots,\bar{r}_{m-1}} \in \mathcal{D}^{t-1}$; in particular, $g \in \mathcal{D}^{m-1}$. Then the set C defined by the formulas (5) is an extended 1-perfect code.

As we will see below (Theorem 1), almost all ($n \to \infty$) codes represented by Construction 2 have a unique representation and this gives a good upper estimation

$$K_{LA}(n) \le |\mathcal{D}^{m-1}| \prod_{t=1}^{m-2} |\mathcal{D}^t|^{|V_{t+1}|\cdot|V_{t+2}|\cdot\dots\cdot|V_{m-1}|} \tag{7}$$

for the number $K_{LA}(n)$ of different extended 1-perfect codes of length n obtained by the method of local automorphisms (*LA*), i. e., by Construction 1 or 2. To show that the number of different LA codes is close to this value, we need some more restrictions on $g_{\bar{r}_t,\dots,\bar{r}_{m-1}}$.

Assume L is a linear subspace of F^n and for each $\bar{r} \in L$ we have $g_{\bar{r}} \in \mathcal{D}^t$ and $g_{\bar{r}}(\cdot) = \bar{v}_{\bar{r}} + \pi_{\bar{r}}(\cdot)$. We say that the collection $\{g_{\bar{r}}\}_{\bar{r} \in L}$ is *degenerate* if the following conditions hold:

- the permutation $\pi_{\bar{r}}$ does not depend on $\bar{r}$, i. e., $\pi_{\bar{r}} = \pi$ for all $\bar{r} \in L$;
- the set $\{\bar{r} + \bar{v}_{\bar{r}} \,|\, \bar{r} \in L\}$ is an affine subspace of F^n.

Otherwise we say that $\{g_{\bar{r}}\}_{\bar{r} \in L}$ is *nondegenerate*.

Construction 3 (LA, lower bound): In addition to the conditions of Construction 2 we require that the collection $\mathbf{g}_{\bar{r}_{t+1},\dots,\bar{r}_{m-1}} = \{g_{\bar{r}_t,\dots,\bar{r}_{m-1}} \in \mathcal{D}^{t-1}\}_{\bar{r}_t \in V^t}$ is nondegenerate for every $t \in \{2, \dots, m-1\}$, $\bar{r}_{t+1} \in V^{t+1}$, …, $\bar{r}_{m-1} \in V^{m-1}$.

IV. Calculations

In this section we establish some facts concerning the structure of order-t components and related objects, on which the main result is based. Given $G \subseteq F^n_{\mathrm{Ev}}$, put

$$\Theta(G) \triangleq \{\bar{x} \in F^n_{\mathrm{Ev}} \,|\, \Omega(\bar{x}) \subseteq \Omega(G)\};$$

clearly, $G \subseteq \Theta(G)$ and $\Omega(\Theta(G)) = \Omega(G)$. The following fact is also straightforward:

Proposition 4: For each $G, G' \subseteq F^n_{\mathrm{Ev}}$ the equality $\Omega(G) = \Omega(G')$ means $\Theta(G) = \Theta(G')$ and vice versa.

For each $t = 1, \dots, m$ and $\bar{x} = (\bar{x}_0, \dots, \bar{x}_{2^t-1}) \in (F^{2^{m-t}})^{2^t} = F^n$ define the generalized parity check

$$p^t(\bar{x}) \triangleq \sum_{i=0}^{2^t-1} \bar{x}_i.$$

Proposition 5: Let $1 \le t \le m-1$; then the following claims hold:
(a) $p^t(\bar{x}) = \bar{0}$ for all $\bar{x} \in A^t$;
(a') $|A^t| = 2^{2^{m-t}(2^t-1)-t}$;
(b) $\Omega(A^t) = \{\bar{x} \in F^n \,|\, wt(p^t(\bar{x})) = 1\}$;
(b') $|\Omega(A^t)| = 2^{2^{m-t}(2^t-1)+m-t}$;
(c) if $t < m-1$, then $\Theta(A^t) = \{\bar{x} \in F^n \,|\, p^t(\bar{x}) = \bar{0}\}$;
(c') if $t < m-1$, then $|\Theta(A^t)| = 2^{2^{m-t}(2^t-1)}$;
(c") $\Theta(A^{m-1}) = F^n_{\mathrm{Ev}}$.

Proof: (a) and (a') are straightforward from the definition of A^t.

(b') Since the code distance of A^t is 4, we have $|\Omega(A^t)| = n|A^t|$.

(b) It follows from (a) that $wt(p^t(\bar{x})) = 1$ for all $\bar{x} \in \Omega(A^t)$. On the other hand, by (b'), we have $|\Omega(A^t)| = |\{\bar{x} \in F^n \,|\, wt(p^t(\bar{x})) = 1\}|$.

(c) It follows from (b) that $p^t(\bar{x}) = \bar{0}$ implies $\bar{x} \in \Theta(A^t)$. Assume $p^t(\bar{x}) \neq \bar{0}$. If $t < m-1$, then there is $\bar{y} \in \Omega(\bar{x})$ such that $wt(p^t(\bar{y})) > 1$; therefore, $\bar{x} \notin \Theta(A^t)$.

(c') follows from (c).

(c") It follows from (b) or (b') that $\Omega(A^{m-1}) = F^n_{\rm Od}$; thus $\Theta(A^{m-1}) = F^n_{\rm Ev}$. ∎

In what follows we will use the 'array' representation of elements of F^n:

$$\bar{x} = (x^t_{0,0}, ..., x^t_{0,2^{m-t}-1}, x^t_{1,0}, \dots, x^t_{2^t-1,2^{m-t}-1}) = (x^t_{i,j})_{i,j}$$

where indexes i, j change in lexicographical order. I. e., for each $t = 1, \dots, m-1$ an element $\bar{x}$ in F^n can be viewed as $2^t \times 2^{m-t}$-array

$$\begin{pmatrix} x^t_{0,0} & x^t_{0,1} & \dots & x^t_{0,2^{m-t}-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x^t_{2^t-1,0} & x^t_{2^t-1,1} & \dots & x^t_{2^t-1,2^{m-t}-1} \end{pmatrix}$$

In these terms, $p^t(\bar{x})$ is the sum of rows of $(x^t_{i,j})_{i,j}$. For further calculations, we introduce the sets

$$B^1 \triangleq V^1$$
$$B^t \triangleq V^t + \Theta(A^{t-1}), \qquad t = 2, \dots, m-1$$

Proposition 6: The sets B^t satisfy the following properties:

(d) $B^t = \{\bar{x} \in F^n \,|\, p^t(\bar{x}) = \bar{0} \text{ and } \sum_{j,\ \text{even } i} x^t_{i,j} = 0\}$; (8)

(d') $|B^t| = |\Theta(A^t)|/2$;

(d") $\mathrm{Aut}(B^t) = \mathcal{B}^t$.

Proof: (d) and (d') are straightforward. For $t = 1$ the claim (d") trivially holds. Assume $t > 1$. Using Proposition 4, we get $\mathcal{B}^t = \mathrm{Aut}(\{\bar{r} + \Theta(A^{t-1})\}_{\bar{r} \in V^t})$. Moreover,

$$\mathrm{Aut}(\{\bar{r} + \Theta(A^{t-1})\}_{\bar{r} \in V^t}) = \mathrm{Aut}\left(\bigcup_{\bar{r} \in V^t} (\bar{r} + \Theta(A^{t-1}))\right) = \mathrm{Aut}(B^t)$$

because, as follows from Proposition 5(c), the sets $\bar{r} + \Theta(A^{t-1})$ are connected components of distance-2 graph of B^t. ∎

Proposition 7: Let $1 \le t \le m-1$; then the following claims hold:

(a) if $t < m-1$, then $\mathcal{A}^t = (\mathcal{P}^t \leftthreetimes \mathcal{Q}^t) \leftthreetimes \mathcal{R}^t$ where

- for groups $\mathcal{G}$ and $\mathcal{G}'$, the notation $\mathcal{G} \leftthreetimes \mathcal{G}'$ means a semidirect product with a normal subgroup $\mathcal{G}'$;
- $\mathcal{P}^t \simeq S_{2^{m-t}}$ is the subgroup of column permutations $\psi : (x^t_{i,j})_{i,j} \to (x^t_{i,\psi(j)})_{i,j}$;
- $\mathcal{Q}^t \simeq (S_{2^t})^{2^{m-t}}$ is the set of collections of permutations in every column $(\phi_0, \dots, \phi_{2^{m-t}-1}) : (x^t_{i,j})_{i,j} \to (x^t_{\phi_j(i),j})_{i,j}$;
- $\mathcal{R}^t \simeq Z_2^{2^{m-t}(2^t-1)}$ is the set of translations $\bar{z}+$, $\bar{z} \in \Theta(A^t)$;

(a') $\mathcal{A}^{m-1} \simeq S_n \leftthreetimes Z_2^{n-1}$;

(b) if $t < m-1$, then $\mathcal{B}^t = (\mathcal{P}^t \leftthreetimes \widehat{\mathcal{Q}}^t) \leftthreetimes \widehat{\mathcal{R}}^t$ where

- $\widehat{\mathcal{Q}}^t \simeq (S_2 \leftthreetimes (S_{2^{t-1}})^2)^{2^{m-t}}$, $\widehat{\mathcal{Q}}^t \subset \mathcal{Q}^t$;
- $\widehat{\mathcal{R}}^t \simeq Z_2^{2^{m-t}(2^t-1)-1}$ is the set of translations $\tau_{\bar{z}}$, $\bar{z} \in V^t + \Theta(A^{t-1})$ where $\tau_{\bar{z}}(\bar{x}) \triangleq \bar{z} + \bar{x}$.

(b') $\mathcal{B}^{m-1} = \mathcal{A}^{m-2} \leftthreetimes \{\tau_{\bar{0}}, \tau_{(11110\dots0)}\}$.

Proof: (a) First we observe that $\mathcal{A}^t = \mathrm{Aut}(\Theta(A^t))$. Since, by Proposition 5(c), $\Theta(A^t)$ is linear, it holds $\mathcal{A}^t = \mathcal{O}^t \leftthreetimes \mathcal{R}^t$ where $\mathcal{O}^t \subset \mathcal{A}^t$ consists of coordinate permutations and $\mathcal{R}^t \subset \mathcal{A}^t$ is a group of translations.

It follows from Proposition 5(c) that $\mathcal{O}^t$ consists of the permutations that do not break columns, i. e., an admissible permutation permutes columns and permutes elements in each column.

(a') follows from Proposition 5(c").

(b) By Proposition 6(d"), we have $\mathcal{B}^t = \mathrm{Aut}(B^t)$. Since B^t is linear, it holds $\mathcal{B}^t = \widehat{\mathcal{O}}^t \leftthreetimes \widehat{\mathcal{R}}^t$ where $\widehat{\mathcal{O}}^t \subset \mathcal{B}^t$ is the coordinate permutation subgroup and $\widehat{\mathcal{R}}^t \subset \mathcal{B}^t$ is the translation subgroup of $\mathcal{B}^t$.

Using Proposition 6(d), we see that an arbitrary permutation from $\widehat{\mathcal{O}}^t$ does not break the columns of $(x^t_{i,j})_{i,j}$ and, moreover, in each column the permutation does not change the parity of row-indexes or changes the parity of all row-indexes. (Indeed, in the case $t < m-1$ for any other coordinate permutation π we can find a weight 2 or weight 4 word $\bar{x}$ such that $\bar{x}$ satisfies (8) but $\pi\bar{x}$ does not.) It can be directly checked that all such permutations belong to $\mathcal{B}^t$.

(b') In the case $t = m-1$ the group $\mathcal{B}^t$ contains some other permutations and this case can be easily calculated directly. ∎

Corollary 1: $|\mathcal{D}^{m-1}| = n!/6((n/4)!)^4$. If $t < m-1$, then

$$|\mathcal{D}^t| = 2\left(\frac{2^t!}{2(2^{t-1}!)^2}\right)^{2^{m-t}} = 2\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2^t \\ 2^{t-1} \end{pmatrix}\right)^{2^{m-t}}.$$

In particular, $|\mathcal{D}^1| = 2$, $|\mathcal{D}^2| = 2 \cdot 3^{\frac{n}{4}}$, $|\mathcal{D}^3| = 2 \cdot 35^{\frac{n}{8}}$, $|\mathcal{D}^4| = 2 \cdot 6435^{\frac{n}{16}}$.

We say that an order-t component G is *bold* if $<G> = B^t$ where $<G>$ means the affine span of G (i. e., the minimal affine subspace including G; if $G \ni \bar{0}$, then the affine span coincides with the linear span).

The next proposition helps us to see that all codes given by Construction 3 are pairwise different.

Proposition 8: Let $1 \le t \le m-1$; for each $\bar{r} \in V^t$ let $G_{\bar{r}}$ be a bold order-$(t-1)$ component and $g_{\bar{r}} \in \mathcal{D}^{t-1}$. Put

$$G \triangleq \bigcup_{\bar{r} \in V^t} (\bar{r} + g_{\bar{r}}(G_{\bar{r}})).$$

Then

(a) G is bold if and only if the collection $\{g_{\bar{r}}\}_{\bar{r} \in V^t}$ is nondegenerate;

(b) if $g'_{\bar{r}} \in \mathcal{D}^{t-1}$ and $G'_{\bar{r}}$ is an order-$(t-1)$ component for all $\bar{r} \in V^t$ (it is not necessary to assume that $G'_{\bar{r}}$ are bold), then

$$G = \bigcup_{\bar{r} \in V^t} (\bar{r} + g'_{\bar{r}}(G'_{\bar{r}}))$$

implies $G'_{\bar{r}} = G_{\bar{r}}$ and $g'_{\bar{r}} = g_{\bar{r}}$ for all $\bar{r} \in V^t$.

Proof: (a) By the definition of bold component we have $<G_{\bar{r}}> = B^{t-1}$; thus

$$\begin{aligned} <G> &= < \bigcup_{\bar{r} \in V^t} (\bar{r} + g_{\bar{r}}(G_{\bar{r}}))> \\ &= < \bigcup_{\bar{r} \in V^t} (\bar{r} + g_{\bar{r}}(<G_{\bar{r}}>))> \\ &= < \bigcup_{\bar{r} \in V^t} (\bar{r} + g_{\bar{r}}(B^{t-1}))>. \end{aligned}$$

Since $g_{\bar{r}}(B^{t-1})$ is a half of $\Theta(A^{t-1})$, the affine span $<G>$ coincides either with $\bigcup_{\bar{r} \in V^t}(\bar{r} + \Theta(A^{t-1})) = B^t$ (i. e., G is bold) or with $\bigcup_{\bar{r} \in V^t}(\bar{r} + g_{\bar{r}}(B^{t-1}))$ (G is not bold). It is clear that the last case occurs if and only if the sets $g_{\bar{r}}(B^{t-1})$, $\bar{r} \in V^t$, are translations of each other (i. e., $g_{\bar{r}}$ have a common coordinate permutation) and the translation vectors compose an affine function on V^t.

(b) It suffices to show that for arbitrary $g, g' \in \mathcal{D}^{t-1}$ and bold components G_0, G'_0 of order $t-1$ the inequality $g' \neq g$ implies $g'(G'_0) \neq g(G_0)$. This holds because, by the definitions of $\mathcal{D}^{t-1}$ and bold components and the fact that $\mathcal{B}^{t-1} = \mathrm{Aut}(B^{t-1})$ (Proposition 6(d")), $g' \neq g$ implies $g'(<G'_0>) \neq g(<G_0>)$. ∎

Proposition 9: If $1 \le t < m-1$, then the number of degenerate collections $\{g_{\bar{r}} \in \mathcal{D}^t\}_{\bar{r} \in V^{t+1}}$ is $|\mathcal{D}^t| \cdot |V^{t+1}|$.

Proof: Assume $1 \le t < m-1$. As follows from Proposition 7 and the fact that $\Theta(A^t)/B^t = 2$ (Proposition 6(d')), for each coordinate permutation π there are 2 or 0 elements $\bar{v}$ such that the automorphism $\bar{v} + \pi(\cdot)$ belongs to $\mathcal{D}^t$. Thus we have:

1) The number of different coordinate permutations in $\mathcal{D}^t$ is $|\mathcal{D}^t|/2$.

2) For each admissible coordinate permutation π the number of collections $\{\bar{v}_{\bar{r}}+\pi(\cdot)\}_{\bar{r}\in V^{t+1}}$ of automorphisms from $\mathcal{D}^t$ such that the set $\{\bar{r}+\bar{v}_{\bar{r}}\,|\,\bar{r}\in V^{t+1}\}$ is an affine subspace equals the number of two-value functions $f: V^{t+1}\to\{\bar{v}_1,\bar{v}_2\}$ satisfying $f(\bar{r}_1)+f(\bar{r}_2)+f(\bar{r}_3)=f(\bar{r}_1+\bar{r}_2+\bar{r}_3)$ for any $\bar{r}_1,\bar{r}_2,\bar{r}_3\in V^{t+1}$, i. e., the number $2|V^{t+1}|$ of affine $\{0,1\}$-value functions on V^{t+1}.

By the definition of degenerate collection, the proposition is proved. ∎

V. A Lower Bound on the Number of 1-Perfect Codes

Denote by $\widetilde{K}_{LA}(n)$ the number of different extended 1-perfect codes given by Construction 3.

Theorem 1: The extended 1-perfect codes from Construction 3 are pairwise different. The number of such codes equals

$$\begin{aligned}\widetilde{K}_{LA}(n) &= |\mathcal{D}^{m-1}|\prod_{t=1}^{m-2}\left(|\mathcal{D}^t|^{|V_{t+1}|}-|\mathcal{D}^t|\cdot|V_{t+1}|\right)^{|V_{t+2}|\cdot\ldots\cdot|V_{m-1}|}\\ &= \frac{n!}{6\left(\frac{n}{4}!\right)^4}\prod_{k=2,4,8,\ldots,\frac{n}{4}}\left(\left(2\cdot 2^{-\frac{n}{k}}\binom{k}{k/2}^{\frac{n}{k}}\right)^{2^{\frac{n}{2k}-1}}\right.\\ &\qquad\left.-\binom{k}{k/2}^{\frac{n}{k}}\cdot 2^{-\frac{n}{2k}}\right)^{2^{\frac{n}{2k}-\log\frac{n}{2k}-1}}\end{aligned}$$

In particular, $\widetilde{K}_{LA}(16) = 15692092416000000$, $\widetilde{K}_{LA}(32)\approx 2^{2363.79}$. The following is the asymptotic formula for $\widetilde{K}_{LA}(n)$:

$$\begin{aligned}\widetilde{K}_{LA}(n) &\sim |\mathcal{D}^{m-1}|\prod_{t=1}^{m-2}|\mathcal{D}^t|^{|V_{t+1}|\cdot|V_{t+2}|\cdot\ldots\cdot|V_{m-1}|}\\ &= \frac{n!}{6\left(\frac{n}{4}!\right)^4}\prod_{k=2,4,8,\ldots,\frac{n}{4}}\left(2\cdot 2^{-\frac{n}{k}}\binom{k}{k/2}^{\frac{n}{k}}\right)^{2^{\frac{n}{k}-\log\frac{n}{k}-1}} \qquad (9)\\ &= 2^{2^{\frac{n}{2}-\log\frac{n}{2}-1}}\cdot(3^{2^{\frac{n}{4}-1}}\cdot 2^{2^{\frac{n}{4}-\log\frac{n}{4}-1}})\\ &\qquad\cdot(35^{2^{\frac{n}{8}-1}}\cdot 2^{2^{\frac{n}{8}-\log\frac{n}{8}-1}})\\ &\qquad\cdot(6435^{2^{\frac{n}{16}-1}}\cdot 2^{2^{\frac{n}{16}-\log\frac{n}{16}-1}})\\ &\qquad\cdot\ldots\cdot\left(\left(\tfrac{1}{2}\binom{n/4}{n/8}\right)^{2^3}\cdot 2^{2^1}\right)\cdot\frac{n!}{6\left(\frac{n}{4}!\right)^4}\end{aligned}$$

Proof: The number of ways to define an extended 1-perfect code using formulas (5) with restrictions of Construction 3 can be easily calculated by Corollary 1 and Proposition 9. Proposition 8 guarantees that different local automorphisms give different codes. ∎

Since there is a one-to-one correspondence (deleting the last symbol) between extended 1-perfect codes and 1-*perfect codes*, we have the following:

Theorem 2 (A lower bound): The number $B(n-1)$ of 1-perfect binary codes of length $n-1=2^m-1$ satisfies

$$B(n-1)\geq\widetilde{K}_{LA}(n) \qquad (10)$$

where the exact expression and the asymptotic form for $\widetilde{K}_{LA}(n)$ are given in Theorem 1.

As we can see, the previous lower bound $2^{2^{\frac{n}{2}-\log\frac{n}{2}-1}}\cdot(3^{2^{\frac{n}{4}-1}}\cdot 2^{2^{\frac{n}{4}-\log\frac{n}{4}-1}})$ [6] consists of two multipliers ($k=2,4$) of (9).

Conjecture 1: The lower bound (10) is asymptotically tight, i. e., (9) is the asymptotic number of 1-perfect binary codes of length $n-1=2^m-1$.

This conjecture is supported by our knowledge about 1-perfect codes of small ranks, i. e., of rank $+1$ and of rank $+2$. The *rank* of the code is the dimension of its affine span; we say that a 1-perfect code of length $n-1$ is of rank $+p$ if its rank is r_H+p where r_H is the dimension of the linear 1-perfect code (Hamming code) of corresponding length. (The notion 'affine span' means the same as 'linear span' if the code contains $\bar{0}$, but the affine span is invariant for the code translations.) We know that the LA construction gives almost all codes of rank $+1$ and almost all codes of rank $+2$ (and, of course, some other codes). Moreover, if the affine span is fixed, then the number of 1-perfect codes of rank $+1$ equals asymptotically

$$2^{2^{\frac{n}{2}-\log\frac{n}{2}-1}}$$

and of rank $+2$,

$$2^{2^{\frac{n}{2}-\log\frac{n}{2}-1}}\cdot(3^{2^{\frac{n}{4}-1}}\cdot 2^{2^{\frac{n}{4}-\log\frac{n}{4}-1}})$$

(if we do not fix the affine span of code, then these values must be multiplied by the indexes $n!/2^{n/2}(\frac{n}{2}-1)(\frac{n}{2}-2)\ldots(\frac{n}{2}-\frac{n}{4})$ and $n!/24^{n/4}(\frac{n}{4}-1)(\frac{n}{4}-2)\ldots(\frac{n}{4}-\frac{n}{8})$ respectively). This knowledge comes from the representation of 1-perfect binary codes of rank $+1$ and $+2$ [2] and the asymptotic number $3^{n+1}2^{2^n+1}(1+o(1))$ of n-ary quasigroups of order 4 [7], [12].

Remark 1: All the codes given by Construction 3 have the rank deficiency $\mathrm{RD}=2$ (the maximum rank of extended 1-perfect binary codes of length $n\geq 16$ equals $n-1$, see [4]; so, the rank deficiency is defined as $\mathrm{RD}(C)\triangleq(n-1)-\mathrm{rank}(C)$) and (as follows from the bound $\dim(\mathrm{kernel}(C))\geq 2^{\mathrm{RD}(C)}$ for binary 1-perfect codes of rank at least $+2$, see [11, Corollary 2.6]) the dimension of kernel at least 4, where $\mathrm{kernel}(C)\triangleq\{\bar{k}\,|\,C+\bar{k}=C\}$. The last fact means that the construction gives at least

$$\frac{\widetilde{K}_{LA}(n)}{n!2^{n-5}}$$

nonequivalent extended 1-perfect binary codes of length n and

$$\frac{\widetilde{K}_{LA}(n)}{(n-1)!2^{n-5}}$$

nonequivalent 1-perfect binary codes of length $n-1$, where $n!2^{n-1}$ is the number of isometries of F^n_{Ev} and $(n-1)!2^{n-1}$ is the number of isometries of F^{n-1}.

Yes, Conjecture 1 implies that almost all (extended) 1-perfect codes have the rank $n-3$, which is not full ($n-1$ for extended 1-perfect codes of length n), and even not fore-full ($n-2$). This lacks support from the length-16 codes, see [15] (the most part of codes has rank $14=n-2$, but the number of full-rank extended 1-perfect codes of length 16 is small indeed, see. [17],[18]), but the LA construction has not "gathered power" when $n=16$ ($m=4$). Indeed, for $m=4$, among the three multipliers of (9), the first one ($t=1$) is almost the same as the second ($t=2$), and the multiplier $n!/6((n/4)!)^4$ is the largest, while asymptotically the first multiplier is the most powerful one. On the other hand, the fact that almost all codes have not full rank can be expected. For example, this holds for 4-ary distance 2 MDS codes (n-ary quasigroups of order 4, see [12], [16]); the rank (over Z_2^2) has three different values for these codes (rank $n-1$ for linear codes of length n, rank $n-\frac{1}{2}=\log_4|Z_2^{2n-1}|$ for 'semilinear' codes, and rank n), but the class with the middle rank value is the most powerful. It is also notable that the number of nonequivalent order 16 Steiner quadruple systems of full rank 15 is smaller than of rank 14 [5].

REFERENCES

[1] S. V. Avgustinovich, "On a property of perfect binary codes," in *Operations Research and Discrete Analysis*, ser. *Math. Appl.*, A. D. Korshunov, Ed. Kluwer, 1997, vol. 391, pp. 13–15, translated from *Diskretn. Anal. Issled. Oper.*, 2(1) (1995), 4–6.

[2] S. V. Avgustinovich, O. Heden, and F. I. Solov'eva, "The classification of some perfect codes," *Des. Codes Cryptography*, vol. 31, no. 3, pp. 313–318, 2004, DOI: 10.1023/B:DESI.0000015891.01562.c1.

[3] S. V. Avgustinovich and F. I. Solov'eva, "Construction of perfect binary codes by sequential shifts of $\tilde{\alpha}$-components," *Probl. Inf. Transm.*, vol. 33, no. 3, pp. 202–207, 1997, translated from *Probl. Peredachi Inf.* 33(3) (1997), 15–21.

[4] T. Etzion and A. Vardy, "Perfect binary codes: Constructions, properties and enumeration," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 40, no. 3, pp. 754–763, 1994, DOI: 10.1109/18.335887.

[5] P. Kaski, P. R. J. Östergård, and O. Pottonen, "The Steiner quadruple systems of order 16," *J. Comb. Theory, Ser. A*, vol. 113, no. 8, pp. 1764–1770, 2006, DOI: 10.1016/j.jcta.2006.03.017.

[6] D. S. Krotov, "Lower estimates for the number of m-quasigroups of order 4 and for the number of perfect binary codes," *Diskretn. Anal. Issled. Oper., Ser. 1*, vol. 7, no. 2, pp. 47–53, 2000, in Russian.

[7] D. S. Krotov and V. N. Potapov, "On the reconstruction of n-quasigroups of order 4 and the upper bounds on their number," in *Proc. the Conference Devoted to the 90th Anniversary of Alexei A. Lyapunov*, Novosibirsk, Russia, Oct. 2001, pp. 323–327, available at http://www.sbras.ru/ws/Lyap2001/2363.

[8] F. J. MacWilliams and N. J. A. Sloane, *The Theory of Error-Correcting Codes*. Amsterdam, Netherlands: North Holland, 1977.

[9] S. A. Malyugin, "On a lower bound on the number of perfect binary codes," *Discrete Appl. Math.*, vol. 135, no. 1-3, pp. 157–160, 2004, translated from *Diskretn. Anal. Issled. Oper., Ser. 1*, 6(4) (1999) 44–48. DOI: 10.1016/S0166-218X(02)00302-5.

[10] K. T. Phelps, "A general product construction for error correcting codes," *SIAM J. Algebraic Discrete Methods*, vol. 5, no. 2, pp. 224–228, 1984.

[11] K. T. Phelps and M. Villanueva, "On perfect codes: Rank and kernel," *Des. Codes Cryptography*, vol. 27, no. 3, pp. 183–194, 2002, DOI: 10.1023/A:1019936019517.

[12] V. N. Potapov and D. S. Krotov, "Asymptotics for the number of n-quasigroups of order 4," *Sib. Math. J.*, vol. 47, no. 4, pp. 720–731, 2006, DOI: 10.1007/s11202-006-0083-9, translated from *Sib. Mat. Zh.* 47(4) (2006), 873–887. ArXiv: math/0605104

[13] Y. L. Vasil'ev, "On nongroup close-packed codes," in *Problemy Kibernetiki*, 1962, vol. 8, pp. 337–339, in Russian, English translation in *Probleme der Kybernetik*, 8 (1965), 92–95.

[14] V. A. Zinoviev and A. Lobstein, "On generalized concatenated constructions of perfect binary nonlinear codes," *Probl. Inf. Transm.*, vol. 36, no. 4, pp. 336–348, 2000, translated from *Probl. Peredachi Inf.* 36(4) (2000), 59–73.

[15] V. A. Zinoviev and D. V. Zinoviev, "Binary extended perfect codes of length 16 and rank 14," *Probl. Inf. Transm.*, vol. 42, no. 2, pp. 123–138, 2006, DOI: 10.1134/S0032946006020062, translated from *Probl. Peredachi Inf.* 42(2) (2006), 63–80.

New references:

[16] D. S. Krotov, V. N. Potapov, n-Ary quasigroups of order 4, *SIAM J. Discrete Math.* 23(2) 2009, 561–570, DOI: 10.1137/070697331 ArXiv: math/0701519

[17] P. R. J. Östergård, O. Pottonen, The perfect binary one-error-correcting codes of length 15: part I – classification, *IEEE Trans. Inform. Theory* 55(10) 2009, 4657–4660, DOI: 10.1109/TIT.2009.2027525 ArXiv: 0806.2513

[18] P. R. J. Östergård, O. Pottonen, K. T. Phelps, The perfect binary one-error-correcting codes of length 15: part II – properties, *submitted for publication*, ArXiv: 0903.2749

О числе 1-совершенных двоичных кодов: нижняя оценка

Д. С. КРОТОВ, С. В. АВГУСТИНОВИЧ

Аннотация

Предложена конструкция 1-совершенных двоичных кодов, дающая новую оценку снизу числа таких кодов. Мы предполагаем, что эта оценка асимптотически точна.

Ключевые слова — автоморфизм, оценка снизу, совершенный двоичный код

1 Введение

Работа посвящена проблеме перечисления 1-совершенных двоичных кодов. Такие коды, как и любые оптимальные коды, являются экстремальными объектами теории корректирующих кодов. В то же время, совершенные коды — это особый вид комбинаторных конфигураций. Конструкция 1-совершенных двоичных кодов, предложенная в настоящей работе, дает самый мощный известный класс таких кодов и приводит к оценке снизу их числа.

Первая известная конструкция [13] нелинейных 1-совершенных двоичных кодов дает оценку

$$B(n-1) \quad \geq \quad 2^{2^{\frac{n}{2}-\log\frac{n}{2}-1}} \cdot 2^{2^{\frac{n}{4}-\log\frac{n}{4}-1}} \cdot 2^{2^{\frac{n}{8}-\log\frac{n}{8}-1}} \cdot \ldots$$

числа $B(n-1)$ таких кодов длины $n-1=2^m-1$ (здесь и далее логарифм имеет основание 2). Эта оценка улучшалась в [3] и [9]; некоторые идеи, предложенные в этих статьях, используются и в настоящей работе. Наилучшая известная ранее оценка снизу [6] имеет вид

$$B(n-1) \quad \geq \quad 2^{2^{\frac{n}{2}-\log\frac{n}{2}-1}} \cdot 3^{2^{\frac{n}{4}-1}} \cdot 2^{2^{\frac{n}{4}-\log\frac{n}{4}-1}}. \qquad (1)$$

Результат [6] сформулирован в терминах частного случая [10] обобщенной каскадной конструкции (см., напр., [14]), который позволяет строить 1-совершенные двоичные коды из q-ичных МДР-кодов с расстоянием 2 (для нижней оценки полезен лишь случай $q=4$), или n-арных квазигрупп (порядка $q=4$). Нижняя оценка числа n-арных квазигрупп порядка 4, данная в [6], асимптотически точна [7],[12], следовательно, этот способ оценки числа 1-совершенных двоичных кодов исчерпан.

Наилучшая известная оценка сверху [1] числа 1-совершенных двоичных кодов имеет вид $2^{2^{n-(3/2)\log n+\log\log(en)}}$.

Метод локальных автоморфизмов, предложенный в настоящей работе, является дальнейшим развитием методов [13],[3],[9],[6]. Поскольку имеется взаимнооднозначное соответствие между 1-совершенными двоичными кодами и расширенными 1-совершенными двоичными кодами, результаты сформулированы в терминах последних.

2 Предварительные сведения

Пусть F^n ($F^n_{\rm Ev}$ / $F^n_{\rm Od}$) — множество двоичных n-слов (с четным / нечетным числом единиц, соответственно) с метрикой Хемминга $d(\cdot,\cdot)$ и покоординатным сложением по модулю 2. Для слова $\bar{x}\in F^n$ определим его *вес* $wt(\bar{x}) \triangleq d(\bar{x},\bar{0})$. *Окрестностью* множества $S\subseteq F^n$ будем считать множество $\Omega(S) \triangleq \bigcup_{\bar{x}\in S}\Omega(\bar{x})$, где $\Omega(\bar{x}) \triangleq \{\bar{y}\in F^n \,|\, d(\bar{y},\bar{x})=1\}$.

Множество $C\subseteq F^n$ называется *кодом с расстоянием* d (*длины* n), если расстояние Хемминга между любыми двумя различными словами из C не меньше d. *Расширенный* 1-*совершенный код* — такое множество $C\subseteq F^n_{\rm Ev}$, что окрестности слов из C попарно не пересекаются и $\Omega(C)=F^n_{\rm Od}$. Как следует из определения, C суть код с расстоянием 4 мощности $|C|=|F^n_{\rm Od}|/n=2^{n-\log n-1}$ и n — степень двойки. С другой стороны, любой код $C\subset F^n_{\rm Ev}$ с расстоянием 4 мощности $|C|=2^{n-\log n-1}$, очевидно, суть расширенный 1-совершенный код. Далее мы считаем, что $n=2^m\geq 16$.

Следующие формулы определяют некие вспомогательные множества $V^t, A^t\subset F^n_{\rm Ev}$ и дают представление расширенного кода Хемминга:

$$V^t \quad \triangleq \quad \{(\bar{v},\bar{v},0,\ldots,0)\in F^n \,|\, \bar{v}\in F^{2^{m-t}}_{\rm Ev}\}, \qquad (2)$$

---

*Это авторский перевод заметки в IEEE Transactions on Information Theory 54(4) 2008, 1760-1765, DOI 10.1109/TIT.2008.917692, ©2008 IEEE.

†Материал настоящей заметки частично докладывался на 10й Международной Конференции по Алгебраической и Комбинаторной Теории Кодирования ACCT-10, Звенигород, Россия, сентябрь 2006, и, в краткой форме, на Всероссийской конференции "Дискретный анализ и исследование операций" DAOR'2004, Новосибирск, Россия, июнь-июль 2004, с.95.

‡Адрес авторов: Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, проспект Академика Коптюга 4, Новосибирск, 630090, Россия (e-mail: krotov@math.nsc.ru, avgust@math.nsc.ru)

$$
\begin{aligned}
& t = 1, \dots, m-1 \\
A^1 &\triangleq V^1 \\
A^t &\triangleq V^t + A^{t-1} = \bigcup_{\bar r \in V^t} (\bar r + A^{t-1}), \qquad (3) \\
& t = 2, \dots, m-1 \\
H &\triangleq A^{m-1}. \qquad (4)
\end{aligned}
$$

Непосредственно проверяется следующий факт:

Предложение 1. *Множество H, определяемое формулами (2)-(4), является линейным расширенным 1-совершенным кодом, т. е. расширенным кодом Хемминга (см., напр., [8, §1.7]), который, как известно, есть единственный линейный расширенный 1-совершенный код, с точностью до перестановки координат.*

Будем говорить, что множество $G \subset F^n_{\text{Ev}}$ является *компонентой порядка* $t \in \{1, \dots, m-1\}$, если $|G| = |A^t|$ и $\Omega(G) = \Omega(A^t)$. Пусть $t \in \{1, \dots, m-1\}$ и $\bar\mu \in F^{2^{m-t}} \times 0^{n-2^{m-t}}$; будем говорить, что множество $M \subset F^n_{\text{Ev}}$ является *$\bar\mu$-компонентой* (порядка t), если $M = G + \bar\mu$ для некоторой компоненты G порядка t.

Пусть $\mathrm{Aut}(F^n)$ обозначает группу изометрий F^n (которая совпадает с группой автоморфизмов графа расстояний 1 на вершинах F^n). Известно, что каждая изометрия $g \in \mathrm{Aut}(F^n)$ имеет единственное представление $g(\cdot) = \bar v + \pi(\cdot)$, где $\bar v$ — *вектор сдвига* из F^n и π перестановка координат. Если $\pi = Id$, т. е. $g(\cdot) = \bar v + \cdot$, то изометрия g называется *сдвигом*. Для множества $S \subseteq F^n$ обозначим через $\mathrm{Aut}(S)$ группу изометрий $g \in \mathrm{Aut}(F^n)$ таких, что $g(S) = S$. Для набора $\mathbf{S} = \{S_1, \dots, S_l\}$ подмножеств F^n обозначим через $\mathrm{Aut}(\mathbf{S})$ группу изометрий $g \in \mathrm{Aut}(F^n)$ таких, что для каждого $S \in \mathbf{S}$ множество $g(S)$ также принадлежит $\mathbf{S}$. Далее мы будем использовать каллиграфические буквы для обозначения подгрупп $\mathrm{Aut}(F^n)$. Положим

$$\mathcal{A}^t \triangleq \mathrm{Aut}(\Omega(A^t)),$$

где A^t определяется формулами (2)-(3).

Предложение 2. (a) *Пусть $t \in \{2, \dots, m-1\}$ и пусть для каждого $\bar\mu \in V^t$ множество $B_{\bar\mu}$ есть $\bar\mu$-компонента порядка $t-1$. Тогда множество $B = \bigcup_{\bar\mu \in V^t} B_{\bar\mu}$ является компонентой порядка t.*

(b) *Если B — компонента порядка t и $g^t \in \mathcal{A}^t$, то $g^t(B)$ — также компонента порядка t.*

(c) *Компонента порядка $m-1$ является расширенным 1-совершенным кодом.*

Доказательство: П.(a) следует из (3), определения компоненты порядка t и равенства $\Omega(\bar\mu + A^{t-1}) = \Omega(B_{\bar\mu})$, которое выполняется по определению $\bar\mu$-компоненты порядка $t-1$.

Пп.(b) и (c) следуют прямо из определений. □

3 ЛА конструкция расширенных 1-совершенных кодов

Предложения 2 достаточно, чтобы удостовериться, что конструкция, приведенная ниже, строит расширенные 1-совершенные коды. Идея конструкции — стартуя с кода Хемминга, применять изометрии F^n к частям кода таким образом, чтобы окрестности этих частей не менялись. Мы называем такие изометрии *локальными автоморфизмами*; локальный автоморфизм действует на часть кода, не меняя ее окрестности. На первом этапе мы берем в качестве таких частей компоненты порядка 1, на втором — компоненты порядка 2, и так далее. На последнем этапе мы "крутим" весь код.

Конструкция 1 (ЛА — локальные автоморфизмы). *Пусть для каждого целого $t \in \{2, \dots, m\}$ и для каждого слова $\bar r_i \in V^i$, $i = t, \dots, m-1$ определен локальный автоморфизм $g_{\bar r_t, \dots, \bar r_{m-1}} \in \mathcal{A}^{t-1}$; в частности, $g \in \mathcal{A}^{m-1}$. Тогда (как следует индукцией по t из Предложения 2) множество C, представленное следующими формулами, является расширенным 1-совершенным кодом.*

$$
\begin{aligned}
A^1_{\bar r_2, \dots, \bar r_{m-1}} &\triangleq V^1, \qquad \bar r_i \in V^i \\
A^t_{\bar r_{t+1}, \dots, \bar r_{m-1}} &\triangleq \bigcup_{\bar r_t \in V^t} \left(\bar r_t + g_{\bar r_t, \dots, \bar r_{m-1}}(A^{t-1}_{\bar r_t, \dots, \bar r_{m-1}}) \right), \\
& \qquad t = 2, \dots, m-1 \\
C &\triangleq g(A^{m-1}). \qquad (5)
\end{aligned}
$$

В Конструкции 1 каждый код получается более чем одним способом. Чтобы оценить число кодов, получаемых таким образом, нужны более строгие ограничения на локальные автоморфизмы.

Пусть

$$
\begin{aligned}
\mathcal{B}^1 &\triangleq \mathrm{Aut}(A^1) \\
\mathcal{B}^t &\triangleq \mathrm{Aut}\big(\{\bar r + \Omega(A^{t-1})\}_{\bar r \in V^t}\big), \qquad t = 2, \dots, m-1.
\end{aligned}
$$

Для каждого $t = 1, \dots, m-1$ зафиксируем множество $\mathcal{D}^t$ представителей смежных классов из $\mathcal{A}^t / \mathcal{B}^t$. Более того, мы выберем представителей таким образом, чтобы выполнялось следующее условие: для двух смежных классов $D_1, D_2 \in \mathcal{A}^t / \mathcal{B}^t$ и их представителей $d_1, d_2 \in \mathcal{D}^t$, $d_1 \in D_1$, $d_2 \in D_2$, равенство $D_1 = \tau D_2$ с некоторым сдвигом τ влечет $d_1 = \tau d_2$ (это условие существенно в определении вырожденного набора и в Предложении 8 ниже).

По индукции можно показать, что

Предложение 3. *Ограничения $g_{\bar r_t, \dots, \bar r_{m-1}} \in \mathcal{D}^{t-1}$ не уменьшают множество кодов, представленных формулами (5).*

Доказательство: Пусть

$$G^t \triangleq \bigcup_{\bar{r}\in V^t} \left(\bar{r} + g_{\bar{r}}(G^{t-1}_{\bar{r}})\right),$$

где $G^{t-1}_{\bar{r}}$ — компонента порядка $t-1$ и $g_{\bar{r}} \in \mathcal{A}^{t-1}$ для всех $\bar{r} \in V^t$. Пусть $g \in \mathcal{A}^t$ и $g = dh$, где $d \in \mathcal{D}^t$ и $h \in \mathcal{B}^t$.

Мы утверждаем, что

$$g(G^t) = d(G'^t), \quad \text{где} \quad G'^t \triangleq \bigcup_{\bar{q}\in V^t} \left(\bar{q} + g'_{\bar{q}}(G^{t-1}_{\rho\bar{q}})\right) \qquad (6)$$

для некоторых $g'_{\bar{q}} \in \mathcal{A}^{t-1}$ и перестановки $\rho : V^t \to V^t$. Действительно, по определению $\mathcal{B}^t$ для каждого $\bar{r} \in V^t$ имеем

$$h(\bar{r} + \Omega(A^{t-1})) = \rho^{-1}\bar{r} + \Omega(A^{t-1}),$$

где ρ — некоторая перестановка на V^t. Таким образом, мы видим, что $h_{\bar{r}}(\cdot) \triangleq \rho^{-1}\bar{r} + h(\bar{r} + \cdot)$ принадлежит $\mathcal{A}^{t-1}$. Далее, подставляя $\bar{q} \triangleq \rho^{-1}\bar{r}$ вместо $\bar{r}$, мы видим, что (6) выполняется с $g'_{\bar{q}} \triangleq h_{\rho\bar{q}}g_{\rho\bar{q}}$.

Таким образом, используя (6), мы можем шаг за шагом заменить операторы $g_{\dots} \in \mathcal{A}^t$ на $d_{\dots} \in \mathcal{D}^t$, стартуя с $t = m-1$ и заканчивая $t = 1$. □

Следовательно, следующая конструкция дает то же множество кодов, что и Конструкция 1.

Конструкция 2 (ЛА, оценка сверху). *Пусть для каждого целого $t \in \{2, \dots, m\}$ и для любых слов $\bar{r}_i \in V^i$, $i = t, \dots, m-1$, мы имеем $g_{\bar{r}_t,\dots,\bar{r}_{m-1}} \in \mathcal{D}^{t-1}$; в частности, $g \in \mathcal{D}^{m-1}$. Тогда множество C, определяемое формулами (5), является расширенным 1-совершенным кодом.*

Как мы увидим ниже (Теорема 1), почти все ($n \to \infty$) коды, представленные Конструкцией 2, имеют единственное представление, что дает хорошую оценку сверху

$$K_{LA}(n) \le |\mathcal{D}^{m-1}| \prod_{t=1}^{m-2} |\mathcal{D}^t|^{|V_{t+1}|\cdot|V_{t+2}|\cdot\dots\cdot|V_{m-1}|} \qquad (7)$$

числа $K_{LA}(n)$ различных расширенных 1-совершенных кодов длины n, полученных методом локальных автоморфизмов (*ЛА*), т. е. Конструкцией 1 или 2. Чтобы показать, что число различных ЛА кодов близко к этому значению, мы введем еще некоторые ограничения на $g_{\bar{r}_t,\dots,\bar{r}_{m-1}}$.

Пусть L — линейное подпространство F^n и для каждого $\bar{r} \in L$ имеем $g_{\bar{r}} \in \mathcal{D}^t$ и $g_{\bar{r}}(\cdot) = \bar{v}_{\bar{r}} + \pi_{\bar{r}}(\cdot)$. Будем говорить, что набор $\{g_{\bar{r}}\}_{\bar{r}\in L}$ *вырожденный*, если выполнены следующие условия:

- перестановка $\pi_{\bar{r}}$ не зависит от $\bar{r}$, т. е. $\pi_{\bar{r}} = \pi$ для всех $\bar{r} \in L$;
- множество $\{\bar{r} + \bar{v}_{\bar{r}} \,|\, \bar{r} \in L\}$ есть аффинное подпространство F^n.

В противном случае будем говорить, что набор $\{g_{\bar{r}}\}_{\bar{r}\in L}$ *невырожденный*.

Конструкция 3 (ЛА, оценка снизу). *Дополнительно к условиям Конструкции 2 мы требуем, чтобы набор $\mathbf{g}_{\bar{r}_{t+1},\dots,\bar{r}_{m-1}} = \{g_{\bar{r}_t,\dots,\bar{r}_{m-1}} \in \mathcal{D}^{t-1}\}_{\bar{r}_t\in V^t}$ был невырожденным для каждых $t \in \{2, \dots, m-1\}$, $\bar{r}_{t+1} \in V^{t+1}$, $\dots$, $\bar{r}_{m-1} \in V^{m-1}$.*

4 Вычисления

В этом разделе мы установим некторые факты касательно структуры компонент порядка t и связанных с ними объектов, на которых базируется доказательство основного результата. Для подмножества $G \subseteq F^n_{\text{Ev}}$ положим

$$\Theta(G) \triangleq \{\bar{x} \in F^n_{\text{Ev}} \,|\, \Omega(\bar{x}) \subseteq \Omega(G)\};$$

очевидно, $G \subseteq \Theta(G)$ и $\Omega(\Theta(G)) = \Omega(G)$. Следующий факт также следует прямо из определений:

Предложение 4. *Для любых подмножеств $G, G' \subseteq F^n_{\text{Ev}}$ равенства $\Omega(G) = \Omega(G')$ и $\Theta(G) = \Theta(G')$ эквивалентны.*

Для каждых $t = 1, \dots, m$ и $\bar{x} = (\bar{x}_0, \dots, \bar{x}_{2^t-1}) \in (F^{2^{m-t}})^{2^t} = F^n$ определим обобщенную проверку на четность

$$p^t(\bar{x}) \triangleq \sum_{i=0}^{2^t-1} \bar{x}_i.$$

Предложение 5. *Пусть $1 \le t \le m-1$. Тогда выполнены следующие утверждения:*
(a) $p^t(\bar{x}) = \bar{0}$ *для всех* $\bar{x} \in A^t$;
(a') $|A^t| = 2^{2^{m-t}(2^t-1)-t}$;
(b) $\Omega(A^t) = \{\bar{x} \in F^n \,|\, wt(p^t(\bar{x})) = 1\}$;
(b') $|\Omega(A^t)| = 2^{2^{m-t}(2^t-1)+m-t}$;
(c) *если* $t < m-1$, *то* $\Theta(A^t) = \{\bar{x} \in F^n \,|\, p^t(\bar{x}) = \bar{0}\}$;
(c') *если* $t < m-1$, *то* $|\Theta(A^t)| = 2^{2^{m-t}(2^t-1)}$;
(c") $\Theta(A^{m-1}) = F^n_{\text{Ev}}$.

Доказательство: (a) и (a') следуют прямо из определения A^t.

(b') Поскольку A^t имеет кодовое расстояние 4, имеем $|\Omega(A^t)| = n|A^t|$.

(b) Из (a) следует, что $wt(p^t(\bar{x})) = 1$ для всех $\bar{x} \in \Omega(A^t)$. С другой стороны, согласно (b'), имеем $|\Omega(A^t)| = |\{\bar{x} \in F^n \,|\, wt(p^t(\bar{x})) = 1\}|$.

(c) Согласно (b), из равенства $p^t(\bar{x}) = \bar{0}$ следует $\bar{x} \in \Theta(A^t)$. Допустим, что $p^t(\bar{x}) \ne \bar{0}$. Если $t < m-1$, то найдется $\bar{y} \in \Omega(\bar{x})$ такое, что $wt(p^t(\bar{y})) > 1$. Следовательно, $\bar{x} \notin \Theta(A^t)$.

(c') следет из (c).

(c") Из (b) и (b') следует, что $\Omega(A^{m-1}) = F^n_{\mathrm{Od}}$, откуда $\Theta(A^{m-1}) = F^n_{\mathrm{Ev}}$. $\square$

Далее мы будем пользоваться представлением элементов из F^n в виде массивов:

$$\bar{x} = (x^t_{0,0}, ..., x^t_{0,2^{m-t}-1}, x^t_{1,0}, \ldots, x^t_{2^t-1,2^{m-t}-1}) = (x^t_{i,j})_{i,j},$$

где индексы i, j изменяются в лексикографическом порядке. Т. е. для каждого $t = 1, \ldots, m-1$ элемент $\bar{x}$ из F^n можно представить как матрицу размера $2^t \times 2^{m-t}$

$$\begin{pmatrix} x^t_{0,0} & x^t_{0,1} & \ldots & x^t_{0,2^{m-t}-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x^t_{2^t-1,0} & x^t_{2^t-1,1} & \ldots & x^t_{2^t-1,2^{m-t}-1} \end{pmatrix}$$

В этих терминах $p^t(\bar{x})$ есть сумма строк матрицы $(x^t_{i,j})_{i,j}$. Для дальнейших вычислений, определим множества

$$\begin{aligned} B^1 &\triangleq V^1 \\ B^t &\triangleq V^t + \Theta(A^{t-1}), \qquad t = 2, \ldots, m-1 \end{aligned}$$

Предложение 6. *Множества B^t обладают следующими свойствами:*
(d) $B^t = \{\bar{x} \in F^n \,|\, p^t(\bar{x}) = \bar{0} \ u \sum_{j,\ \text{чётн.}\ i} x^t_{i,j} = 0\}$; (8)
(d') $|B^t| = |\Theta(A^t)|/2$;
(d") $\mathrm{Aut}(B^t) = \mathcal{B}^t$.

Доказательство: Пп. (d) и (d') очевидны. Для $t = 1$ утверждение (d") тривиально выполняется. Пусть $t > 1$. Пользуясь Предложением 4, получаем $\mathcal{B}^t = \mathrm{Aut}(\{\bar{r} + \Theta(A^{t-1})\}_{\bar{r} \in V^t})$. Более того,

$$\begin{aligned} \mathrm{Aut}(\{\bar{r} + \Theta(A^{t-1})\}_{\bar{r} \in V^t}) &= \mathrm{Aut}\Big(\bigcup_{\bar{r} \in V^t} (\bar{r} + \Theta(A^{t-1})) \Big) \\ &= \mathrm{Aut}(B^t), \end{aligned}$$

поскольку, как следует из Предложения 5(c), множества $\bar{r} + \Theta(A^{t-1})$ являются компонентами связности графа расстояний 2 множества B^t. $\square$

Предложение 7. *Пусть $1 \le t \le m-1$, тогда верны следующие факты:*
(a) *если $t < m-1$, то $\mathcal{A}^t = (\mathcal{P}^t \leftthreetimes \mathcal{Q}^t) \leftthreetimes \mathcal{R}^t$, где*

- *для групп $\mathcal{G}$ and $\mathcal{G}'$ обозначение $\mathcal{G} \leftthreetimes \mathcal{G}'$ используется для их полупрямого произведения, где $\mathcal{G}'$ — нормальная подгруппа;*
- *$\mathcal{P}^t \simeq S_{2^{m-t}}$ — подгруппа перестановок столбцов $\psi : (x^t_{i,j})_{i,j} \to (x^t_{i,\psi(j)})_{i,j}$;*
- *$\mathcal{Q}^t \simeq (S_{2^t})^{2^{m-t}}$ — множество наборов перестановок в каждом столбце $(\phi_0, \ldots, \phi_{2^{m-t}-1}) : (x^t_{i,j})_{i,j} \to (x^t_{\phi_j(i),j})_{i,j}$;*
- *$\mathcal{R}^t \simeq Z_2^{2^{m-t}(2^t-1)}$ — множество сдвигов $\bar{z}+$, $\bar{z} \in \Theta(A^t)$;*

(a') $\mathcal{A}^{m-1} \simeq S_n \leftthreetimes Z_2^{n-1}$;
(b) *если $t < m-1$, то $\mathcal{B}^t = (\mathcal{P}^t \leftthreetimes \widehat{\mathcal{Q}}^t) \leftthreetimes \widehat{\mathcal{R}}^t$, где*

- *$\widehat{\mathcal{Q}}^t \simeq (S_2 \leftthreetimes (S_{2^{t-1}})^2)^{2^{m-t}}$, $\widehat{\mathcal{Q}}^t \subset \mathcal{Q}^t$;*
- *$\widehat{\mathcal{R}}^t \simeq Z_2^{2^{m-t}(2^t-1)-1}$ — множество сдвигов $\tau_{\bar{z}}$, $\bar{z} \in V^t + \Theta(A^{t-1})$, где $\tau_{\bar{z}}(\bar{x}) \triangleq \bar{z} + \bar{x}$.*

(b') $\mathcal{B}^{m-1} = \mathcal{A}^{m-2} \leftthreetimes \{\tau_{\bar{0}}, \tau_{(11110\ldots0)}\}$.

Доказательство: (a) Заметим сначала, что $\mathcal{A}^t = \mathrm{Aut}(\Theta(A^t))$. Поскольку по Предложению 5(c) множество $\Theta(A^t)$ линейное, выполнено равенство $\mathcal{A}^t = \mathcal{O}^t \leftthreetimes \mathcal{R}^t$, где $\mathcal{O}^t \subset \mathcal{A}^t$ состоит из перестановок координат и $\mathcal{R}^t \subset \mathcal{A}^t$ — группа сдвигов.

Из Предложения 5(c) следует, что $\mathcal{O}^t$ состоит из перестановок, не меняющих разбиение на столбцы, т. е. допустимая перестановка переставляет столбцы между собой и переставляет элементы внутри каждого столбца.

(a') следует из Предложения 5(c").

(b) По Предложению 6(d") имеем $\mathcal{B}^t = \mathrm{Aut}(B^t)$. Поскольку множество B^t линейно, выполнено $\mathcal{B}^t = \widehat{\mathcal{O}}^t \leftthreetimes \widehat{\mathcal{R}}^t$, где $\widehat{\mathcal{O}}^t \subset \mathcal{B}^t$ — подгруппа перестановок координат и $\widehat{\mathcal{R}}^t \subset \mathcal{B}^t$ — подгруппа сдвигов группы $\mathcal{B}^t$.

Пользуясь Предложением 6(d), мы видим, что произвольная перестановка из $\widehat{\mathcal{O}}^t$ не меняет разбиение на столбцы массива $(x^t_{i,j})_{i,j}$ и, более того, в каждом столбце перестановка не меняет четность индексов строк либо меняет четность одновременно всех индексов строк. (Действительно, в случае $t < m-1$ для любой другой перестановки π мы можем найти слово $\bar{x}$ веса 2 или 4 такое, что $\bar{x}$ удовлетворяет (8), а $\pi\bar{x}$ — нет.) Легко убедиться, что все такие перестановки принадлежат $\mathcal{B}^t$.

(b') В случае $t = m-1$ группа $\mathcal{B}^t$ содержит некоторые добавочные перестановки, и этот случай легко проверяется непосредственно. $\square$

Следствие 1. $|\mathcal{D}^{m-1}| = n!/6((n/4)!)^4$. *Если $t < m-1$, то*

$$|\mathcal{D}^t| = 2\left(\frac{2^t!}{2(2^{t-1}!)^2}\right)^{2^{m-t}} = 2\left(\frac{1}{2}\binom{2^t}{2^{t-1}}\right)^{2^{m-t}}.$$

В частности, $|\mathcal{D}^1| = 2$, $|\mathcal{D}^2| = 2 \cdot 3^{\frac{n}{4}}$, $|\mathcal{D}^3| = 2 \cdot 35^{\frac{n}{8}}$, $|\mathcal{D}^4| = 2 \cdot 6435^{\frac{n}{16}}$.

Будем говорить, что компонента G порядка t *плотная*, если $<G> = B^t$, где $<G>$ означает аффинную оболочку множества G (т. е. минимальное аффинное подпространство, включающее G; в случае $G \ni \bar{0}$ аффинная оболочка совпадает с линейной оболочкой).

Следующее предложение поясняет, почему все коды из Конструкции 3 попарно различны.

Предложение 8. *Пусть $1 \le t \le m-1$. Для каждого $\bar r \in V^t$ пусть $G_{\bar r}$ есть плотная компонента порядка $(t-1)$ и $g_{\bar r} \in \mathcal{D}^{t-1}$. Положим*

$$G \triangleq \bigcup_{\bar r \in V^t} (\bar r + g_{\bar r}(G_{\bar r})).$$

Тогда
(a) *Компонента G плотная если и только если набор $\{g_{\bar r}\}_{\bar r \in V^t}$ невырожденный;*
(b) *если $g'_{\bar r} \in \mathcal{D}^{t-1}$ и для каждого $\bar r \in V^t$ множество $G'_{\bar r}$ — компонента порядка $(t-1)$ (здесь мы не подразумеваем, что компонента $G'_{\bar r}$ обязательно плотная), то из равенства*

$$G = \bigcup_{\bar r \in V^t} (\bar r + g'_{\bar r}(G'_{\bar r}))$$

следует $G'_{\bar r} = G_{\bar r}$ и $g'_{\bar r} = g_{\bar r}$ для всех $\bar r \in V^t$.

Доказательство: (a) По определению плотной компоненты имеем $<G_{\bar r}> = B^{t-1}$, откуда

$$\begin{aligned} <G> &= < \bigcup_{\bar r \in V^t} (\bar r + g_{\bar r}(G_{\bar r}))> \\ &= < \bigcup_{\bar r \in V^t} (\bar r + g_{\bar r}(<G_{\bar r}>))> \\ &= < \bigcup_{\bar r \in V^t} (\bar r + g_{\bar r}(B^{t-1}))>. \end{aligned}$$

Поскольку $g_{\bar r}(B^{t-1})$ — половина от $\Theta(A^{t-1})$, аффинная оболочка $<G>$ совпадает либо с $\bigcup_{\bar r \in V^t}(\bar r + \Theta(A^{t-1})) = B^t$ (т. е. G плотная), либо с $\bigcup_{\bar r \in V^t}(\bar r + g_{\bar r}(B^{t-1}))$ (G не плотная). Ясно, что последний случай имеет место если и только если множества $g_{\bar r}(B^{t-1})$, $\bar r \in V^t$, — сдвиги друг друга (т. е. $g_{\bar r}$ имеют одну и ту же перестановку координат) и векторы сдвигов образуют аффинную функцию на V^t.

(b) Достаточно показать, что для произвольных $g, g' \in \mathcal{D}^{t-1}$ и полных компонент G_0, G'_0 порядка $t-1$ из $g' \ne g$ следует $g'(G'_0) \ne g(G_0)$. Это верно, поскольку из определений $\mathcal{D}^{t-1}$ и полных компонент и равенства $\mathcal{B}^{t-1} = \mathrm{Aut}(B^{t-1})$ (Предложение 6(d")) имеем: $g' \ne g$ подразумевает $g'(<G'_0>) \ne g(<G_0>)$. □

Предложение 9. *Если $1 \le t < m-1$, то число вырожденных наборов $\{g_{\bar r} \in \mathcal{D}^t\}_{\bar r \in V^{t+1}}$ равно $|\mathcal{D}^t| \cdot |V^{t+1}|$.*

Доказательство: Пусть $1 \le t < m-1$. Как следует из Предложения 7 и равенства $\Theta(A^t)/B^t = 2$ (Предложение 6(d')), для каждой перестановки координат π имеется 2 или 0 элементов $\bar v$ таких, что автоморфизм $\bar v + \pi(\cdot)$ принадлежит $\mathcal{D}^t$. Отсюда имеем следующее:

1) Число различных перестановок координат в $\mathcal{D}^t$ равно $|\mathcal{D}^t|/2$.

2) Для каждой допустимой перестановки координат π число таких наборов $\{\bar v_{\bar r} + \pi(\cdot)\}_{\bar r \in V^{t+1}}$ автоморфизмов из $\mathcal{D}^t$, что множество $\{\bar r + \bar v_{\bar r} \,|\, \bar r \in V^{t+1}\}$ есть аффинное подпространство, равно числу двузначных функций $f : V^{t+1} \to \{\bar v_1, \bar v_2\}$, удовлетворяющих соотношению $f(\bar r_1) + f(\bar r_2) + f(\bar r_3) = f(\bar r_1 + \bar r_2 + \bar r_3)$ для любых $\bar r_1, \bar r_2, \bar r_3 \in V^{t+1}$, т. е. числу $2|V^{t+1}|$ аффинных $\{0,1\}$-значных функций на V^{t+1}.

По определению вырожденного набора, предложение доказано. □

5 Нижняя оценка числа 1-совершенных кодов

Обозначим через $\widetilde K_{LA}(n)$ число различных расширенных 1-совершенных кодов, представляемых Конструкцией 3.

Теорема 1. *Расширенные 1-совершенные коды из Конструкции 3 попарно различны. Число таких кодов равно*

$$\begin{aligned} \widetilde K_{LA}(n) &= |\mathcal{D}^{m-1}| \prod_{t=1}^{m-2} \Big(|\mathcal{D}^t|^{|V_{t+1}|} - |\mathcal{D}^t| \cdot |V_{t+1}| \Big)^{|V_{t+2}| \cdot \ldots \cdot |V_{m-1}|} \\ &= \tfrac{n!}{6\left(\frac{n}{4}!\right)^4} \prod_{k=2,4,8,\ldots,\frac{n}{4}} \left(\left(2 \cdot 2^{-\frac{n}{k}} \binom{k}{k/2}^{\frac{n}{k}} \right)^{2^{\frac{n}{2k}-1}} - \binom{k}{k/2}^{\frac{n}{k}} \cdot 2^{-\frac{n}{2k}} \right)^{2^{\frac{n}{2k}-\log\frac{n}{2k}-1}} \end{aligned}$$

В частности, $\widetilde K_{LA}(16) = 15692092416000000$, $\widetilde K_{LA}(32) \approx 2^{2363.79}$. Следующая формула дает асимптотику числа $\widetilde K_{LA}(n)$:

$$\begin{aligned} \widetilde K_{LA}(n) &\sim |\mathcal{D}^{m-1}| \prod_{t=1}^{m-2} |\mathcal{D}^t|^{|V_{t+1}| \cdot |V_{t+2}| \cdot \ldots \cdot |V_{m-1}|} \\ &= \frac{n!}{6\left(\frac{n}{4}!\right)^4} \prod_{k=2,4,8,\ldots,\frac{n}{4}} \left(2 \cdot 2^{-\frac{n}{k}} \binom{k}{k/2}^{\frac{n}{k}} \right)^{2^{\frac{n}{k}-\log\frac{n}{k}-1}} \qquad (9) \\ &= 2^{2^{\frac{n}{2}-\log\frac{n}{2}-1}} \cdot (3^{2^{\frac{n}{4}-1}} \cdot 2^{2^{\frac{n}{4}-\log\frac{n}{4}-1}}) \\ &\quad \cdot (35^{2^{\frac{n}{8}-1}} \cdot 2^{2^{\frac{n}{8}-\log\frac{n}{8}-1}}) \\ &\quad \cdot (6435^{2^{\frac{n}{16}-1}} \cdot 2^{2^{\frac{n}{16}-\log\frac{n}{16}-1}}) \\ &\quad \cdot \ldots \cdot \left(\left(\tfrac{1}{2} \binom{n/4}{n/8} \right)^{2^3} \cdot 2^{2^1} \right) \cdot \frac{n!}{6\left(\frac{n}{4}!\right)^4} \end{aligned}$$

Доказательство: Число способов определить расширенный 1-совершенный код по формулам (5) с ограничениями Конструкции 3 легко посчитать при помощи Следствия 1 и Предложения 9. Предложение 8 гарантирует, что различные наборы локальных автоморфизмов дают различные коды. □

Поскольку имеется взаимнооднозначное соответствие (удаление последнего символа) между расширенными 1-совершенными кодами и 1-*совершенными кодами*, имеем следующее:

Теорема 2 (Нижняя оценка). *Число $B(n-1)$ 1-совершенных двоичных кодов длины $n-1=2^m-1$ удовлетворяет неравенству*

$$B(n-1) \geq \widetilde{K}_{LA}(n), \tag{10}$$

где точное выражение и асимптотика для $\widetilde{K}_{LA}(n)$ представлены в Теореме 1.

Как легко заметить, предыдущая оценка $2^{2^{\frac{n}{2}-\log\frac{n}{2}-1}} \cdot (3^{2^{\frac{n}{4}-1}} \cdot 2^{2^{\frac{n}{4}-\log\frac{n}{4}-1}})$ [6] состоит из двух множителей ($k=2,4$) из (9).

Гипотеза 1. *Оценка* (10) *асимптотически точна, т. е.* (9) — *асимптотика числа 1-совершенных двоичных кодов длины $n-1=2^m-1$.*

Эта гипотеза подтверждается имеющейся информацией об 1-совершенных кодах малых рангов, т. е. рангов $+1$ и $+2$. *Ранг* (*rank*) кода — размерность его аффинной оболочки; скажем, что 1-совершенный код длины $n-1$ есть код ранга $+p$, если его ранг равен r_H+p, где r_H — размерность линейного 1-совершенного кода (кода Хемминга) той же длины. (Термин 'аффинная оболочка' означает то же, что и 'линейная оболочка' для кодов, содержащих $\bar{0}$, но аффинная оболочка инвариантна относительно сдвигов кода.) Известно, что ЛА конструкция дает почти все коды ранга $+1$ и почти все коды ранга $+2$ (и, разумеется, коды большего ранга). Более того, при фиксированной аффинной оболочке число 1-совершенных кодов ранга $+1$ асимптотически равно

$$2^{2^{\frac{n}{2}-\log\frac{n}{2}-1}},$$

а ранга $+2$ —

$$2^{2^{\frac{n}{2}-\log\frac{n}{2}-1}} \cdot (3^{2^{\frac{n}{4}-1}} \cdot 2^{2^{\frac{n}{4}-\log\frac{n}{4}-1}})$$

(если не фиксировать аффинную оболочку кода, то эти значения нужно умножить на $n!/2^{n/2}(\frac{n}{2}-1)(\frac{n}{2}-2)\dots(\frac{n}{2}-\frac{n}{4})$ и $n!/24^{n/4}(\frac{n}{4}-1)(\frac{n}{4}-2)\dots(\frac{n}{4}-\frac{n}{8})$ соответственно). Эти данные следуют из представления 1-совершенных двоичных кодов ранга $+1$ и $+2$ [2] и асимптотики $3^{n+1}2^{2^n+1}(1+o(1))$ числа n-арных квазигрупп порядка 4 [7],[12].

Замечание 1. Все коды из Конструкции 3 имеют дефицит ранга $\mathrm{RD}=2$ (максимальный возможный ранг расширенного 1-совершенного кода длины $n\geq 16$ равен $n-1$, см. [4]; таким образом, дефицит ранга определяется как $\mathrm{RD}(C) \triangleq (n-1)-\mathrm{rank}(C)$) и (как следует из неравенства $\dim(\mathrm{kernel}(C)) \geq 2^{\mathrm{RD}(C)}$ для двоичных 1-совершенных кодов ранга $+2$ и больше, см. [11, Corollary 2.6]) размерность ядра (kernel) не меньше 4, где $\mathrm{kernel}(C) \triangleq \{\bar{k} \,|\, C+\bar{k}=C\}$. Последний факт означает, что конструкция дает не менее

$$\frac{\widetilde{K}_{LA}(n)}{n!2^{n-5}}$$

неэквивалентных расширенных 1-совершенных двоичных кодов длины n и

$$\frac{\widetilde{K}_{LA}(n)}{(n-1)!2^{n-5}}$$

неэквивалентных 1-совершенных двоичных кодов длины $n-1$, где $n!2^{n-1}$ — число изометрий F^n_{Ev} и $(n-1)!2^{n-1}$ — число изометрий F^{n-1}.

Да, Гипотеза 1 подразумевает, что почти все (расширенные) 1-совершенные коды имеют ранг $n-3$, который не является полным ($n-1$ для расширенных 1-совершенных кодов длины n), и даже не предполный ($n-2$). Это не подтверждается для кодов длины 16, см. [15] (кстати, расширенных 1-совершенных кодов длины 16 полного ранга действительно мало, см. [17],[18]), но ЛА конструкция еще не "набрала обороты" при $n=16$ ($m=4$). В самом деле, при $m=4$ среди трех множителей (9) первый ($t=1$) имеет почти такую же величину, что и второй ($t=2$), а множитель $n!/6((n/4)!)^4$ является наибольшим, в то время как асимптотически первый множитель — самый мощный. С другой стороны, факт, что почти все коды не имеют полный ранг, вряд ли был бы сюрпризом. Например, аналогичное явление известно для МДР-кодов с расстоянием 2 в четырехбуквенном алфавите (n-арных квазигрупп порядка 4, см. [12],[16]), у которых ранг (над Z_2^2) имеет три возможных значения (ранг $n-1$ для линейных кодов длины n, ранг $n-\frac{1}{2}=\log_4|Z_2^{2n-1}|$ для 'полулинейных', и ранг n), причем асимптотически почти все коды имеют средний ранг. Стоит также заметить, что число неэквивалентных систем троек Штейнера порядка 16 полного ранга 15 меньше, чем ранга 14 [5].

Список литературы

[1] С. В. Августинович, Об одном свойстве совершенных двоичных кодов, Дискретн. анализ и исслед. опер. 2(1) 1995, 4–6 (English transl.: S. V. Avgustinovich, On a property of perfect binary codes, in *Operations Research and Discrete Analysis*, ser. *Math. Appl.*, A. D. Korshunov, Ed. Kluwer, 1997, vol. 391, pp. 13–15)

[2] S. V. Avgustinovich, O. Heden, F. I. Solov'eva, The classification of some perfect codes, *Des. Codes Cryptography* 31(3) 2004, 313–318, DOI: 10.1023/B:DESI.0000015891.01562.c1

[3] С. В. Августинович, Ф. И. Соловьева, Построение совершенных двоичных кодов последовательными сдвигами $\tilde{\alpha}$-компонент, *Пробл. передачи информ.* 33(3) 1997, 15–21 (English transl.: S. V. Avgustinovich, F. I. Solov'eva, Construction of perfect binary codes by sequential shifts of $\tilde{\alpha}$-components, *Probl. Inf. Transm.* 33(3) 1997, 202–207)

[4] T. Etzion, A. Vardy, Perfect binary codes: Constructions, properties and enumeration, *IEEE Trans. Inf. Theory* 40(3) 1994, 754–763, DOI: 10.1109/18.335887

[5] P. Kaski, P. R. J. Östergård, O. Pottonen, The Steiner quadruple systems of order 16, *J. Comb. Theory, Ser. A* 113(8) 2006, 1764–1770, DOI: 10.1016/j.jcta.2006.03.017

[6] Д. С. Кротов, Нижние оценки числа m-квазигрупп порядка 4 и числа совершенных двоичных кодов, *Дискретн. анализ и исслед. опер., сер. 1* 7(2) 2000, 47–53

[7] D. S. Krotov, V. N. Potapov, On the reconstruction of n-quasigroups of order 4 and the upper bounds on their number, in *Proc. the Conference Devoted to the 90th Anniversary of Alexei A. Lyapunov*, Novosibirsk, Russia, Oct. 2001, pp. 323–327, available at http://www.sbras.ru/ws/Lyap2001/2363

[8] Ф. Дж. Мак-Вильямс, Н. Дж. А. Слоэн. *Теория кодов, исправляющих ошибки.* М.: Связь, 1979 (F. J. MacWilliams, N. J. A. Sloane, *The Theory of Error-Correcting Codes.* Amsterdam, Netherlands: North Holland, 1977)

[9] С. А. Малюгин, О нижней оценке числа совершенных двоичных кодов *Дискретн. анализ и исслед. опер., сер. 1* 6(4) 1999, 44-48 (English transl.: S. A. Malyugin, On a lower bound on the number of perfect binary codes, *Discrete Appl. Math.* 135(1-3) 2004, 157–160, DOI: 10.1016/S0166-218X(02)00302-5)

[10] K. T. Phelps, A general product construction for error correcting codes, *SIAM J. Algebraic Discrete Methods* 5(2) 1984, 224–228, DOI: 10.1137/0605023

[11] K. T. Phelps, M. Villanueva, On perfect codes: Rank and kernel, *Des. Codes Cryptography* 27(3) 2002, 183–194, DOI: 10.1023/A:1019936019517

[12] В. Н. Потапов, Д. С. Кротов, Асимптотика числа n-квазигрупп порядка 4, *Сиб. матем. журн.* 47(4) 2006, 873–887. (English transl.: V. N. Potapov, D. S. Krotov, Asymptotics for the number of n-quasigroups of order 4, *Sib. Math. J.* 47(4) 2006, 720–731, DOI: 10.1007/s11202-006-0083-9) ArXiv: math/0605104

[13] Ю. Л. Васильев, О негрупповых плотно упакованных кодах, в *Проблемы кибернетики* 8, М.: Наука, 1962, 337–339 (English transl.: Yu. L. Vasil'ev, On nongroup close-packed codes, in *Probleme der Kybernetik* 8, 1965, 92–95)

[14] В. А. Зиновьев, А. С. Лобстейн, Об обобщенных каскадных конструкциях совершенных двоичных нелинейных кодов, *Пробл. передачи информ.* 36(4) 2000, 59–73 (English transl.: V. A. Zinoviev, A. Lobstein, On generalized concatenated constructions of perfect binary nonlinear codes, *Probl. Inf. Transm.* 36(4) 2000, 336–348)

[15] В. А. Зиновьев, Д. В. Зиновьев, Двоичные расширенные совершенные коды длины 16 ранга 14, *Пробл. передачи информ.* 42(2) 2006, 63–80 (English transl.: V. A. Zinoviev, D. V. Zinoviev, Binary extended perfect codes of length 16 and rank 14, *Probl. Inf. Transm.* 42(2) 2006, 123–138, DOI: 10.1134/S0032946006020062)

Добавленный список литературы:

[16] D. S. Krotov, V. N. Potapov, n-Ary quasigroups of order 4, *SIAM J. Discrete Math.* 23(2) 2009, 561–570, DOI: 10.1137/070697331 ArXiv: math/0701519

[17] P. R. J. Östergård, O. Pottonen, The perfect binary one–error-correcting codes of length 15: part I – classification, *IEEE Trans. Inform. Theory* 55(10) 2009, 4657–4660, DOI: 10.1109/TIT.2009.2027525 ArXiv: 0806.2513

[18] P. R. J. Östergård, O. Pottonen, K. T. Phelps, The perfect binary one-error-correcting codes of length 15: part II – properties, submitted for publication, ArXiv: 0903.2749